Dr Natalia Iwaszczuk

Instytut Matematyki
Uniwersytet Rzeszowski

Innowacyjne sposoby zarządzania ryzykiem działalności przedsiębiorstw za pomocą strategii opcyjnych

WPROWADZENIE

Opcje są przedmiotami obrotu na wielu światowych rynkach derywatów. Takie rynki często nazywają rynkami terminowymi, ponieważ terminy rozliczeń kontraktów zawartych na nich są odroczone w czasie. Oprócz opcji na rynkach terminowych handluje się wieloma innymi derywatami (finansowymi instrumentami pochodnymi), w tym kontraktami futures, forward i swap. Warto zauważyć, że kontrakty futures są przedmiotami obrotu wyłącznie na giełdach papierów wartościowych. Natomiast kontrakty forward i swap sprzedawane i kupowane są wyłącznie na rynkach pozagiełdowych. Jedynymi instrumentami będącymi zarówno w obrocie giełdowym, jak i pozagiełdowym są opcje.

Poza tym opcje – to instrumenty o ryzyku asymetrycznym. To znaczy, że ryzyko jednej ze stron kontraktu opcyjnego jest ograniczone do kwoty zapłaconej za opcję ceny (tzw. premii opcyjnej). Właśnie ta pozycja w kontrakcie opcyjnym jest zalecana dla budowania strategii hedgingowych różnych podmiotów gospodarczych.

W zarządzaniu ryzykiem działalności przedsiębiorstw często stosuje się strategie opcyjne z wykorzystaniem opcji standardowych (*vanilla options*). Jednak w przeciągu ostatnich dwudziestu lat na rynku pozagiełdowym coraz częściej pojawiają się różne odmiany tych derywatów nazywanych opcjami niestandardowymi lub egzotycznymi (*exotic options*). Te odmiany, które sprawdziły się na rynku pozagiełdowym wprowadzane są do obrotu giełdowego.

Opcje egzotyczne różnią się od opcji standardowych przede wszystkim funkcją wypłaty. Mogą też się różnić sposobem rozliczenia, terminem wykonania, terrninem zapłaty za opcję lub określenia jej typu (kupna czy sprzedaży) etc. Oddzielną grupę opcji egzotycznych tworzą opcje korelacyjne wystawione na więcej niż jeden aktyw bazowy. Najprostszym przedstawicielem tej grupy są opcje wymiany jednego instrumentu bazowego na inny.

Głównym problemem przy zawieraniu transakcji opcyjnych jest prawidłowe ustalenie premii opcyjnej. Do wyceny opcji wykorzystywany jest szereg modeli, które najczęściej operają się na dwóch modelach podstawowych – modelu dwumianowym o dyskretnym czasie i modelu Blacka-Scholesa o czasie ciągłym. Przy czym każdy z modeli zawiera w sobie pewne założenia, jakie nie zawsze zgadzają się z realnymi procesami zachodzącymi na rynkach pieniężnym, kapitałowym, towarowym i terminowym. Mianowicie, w wielu modelach przyjmowane są założenia o stałości niektórych parametrów opcji.

W celu przybliżenia modeli wyceny opcji do realnych procesów rynkowych wielu naukowców od dawna stosują różnorodne metody matematyczne. Wśród tych metod należy wymienić kilka najczęściej wykorzystywanych przez badaczy, a mianowicie: metody stochastyczne, przybliżone numeryczne, regresyjne, symulacyjne i optymalizacyjne.

Wśród metod stochastycznych najbardziej popularne są procesy Levi'ego, Gaussa-Wienera, Markowa, Bessela, metoda martyngałow i inne. Mianowicie, stochastyczne procesy Levi'ego wykorzystane zostały w badaniach takich naukowców jak: H. Albrecher i M. Predota [Albrecher, Predota, 2002, s. 35–57], którzy zbadali przedziały zmian cen i dokonali aproksymacji cen dyskretnych opcji azjatyckich za pomocą Gamma dyspersyjnych modeli; P. Carr i L. Wu [Carr, Wu, 2004, s. 113–141], którzy zastosowali do wyceny opcji niestacjonarne procesy Levi'ego; J.C. Duan i J.G. Simonato [Duan, Simonato, 1998, s. 12–19] dostosowali metodę aproksymacji łańcuchami Markowa do modeli GARCH w celu obliczenia cen opcji amerykańskich; J. Tsitsiklis i B. Van Roy [Tsitsiklis, Van Roy, 1999, s. 1840–1851] opracowali metodę optymalnego stopu w markowskich modelach derywatów finansowych o dużej liczbie zmiennych; J.P. Nunes [Nunes, 2006, s. 61–81] opisał proces modelowania cen opcji barierowych, wystawionych na stopę procentową LIBOR, za pomocą wieloczynnikowego modelu gaussowskiego typu Heath-Jarrow-Morton; z kolei H. Geman i V. Yor [Geman, Yor, 1993, s. 349–375] opracowali metodę wyceny opcji azjatyckich opartą na stochastycznych procesach Bessela i inni.

Celem naszego artykułu jest opracowanie nowej metody wyceny ***opcji wymiany*** *(exchange options)* jednego instrumentu bazowego na inny dla przypadku stochastycznej zmienności ceny aktywu bazowego. Na podstawie opracowanej metody zbudujemy modele wyceny opcji wymiany, które mogą być wykorzystane przez przedsiębiorstwa w zarządzaniu ryzykiem.

SPOSOBY WYCENY OPCJI STANDARDOWYCH

Do wyceny opcji standardowych w przeciągu ostatnich trzydziestu lat opracowanych zostało wiele modeli ekonomiczno-matematycznych. Jednak podstawę tworzą dwa fundamentalne odkrycia w teorii wyceny opcji – model dwumianowy oraz model Blacka-Scholesa.

Pierwszy z nich jest modelem o dyskretnym czasie, natomiast drugi – o czasie ciągłym. W naszych badaniach będziemy opierać się o zmodyfikowany przez R. Mertona model Blacka-Scholesa wyceny europejskich opcji standardowych wystawionych na akcje, na które wypłacane są dywidendy w sposób ciągły. Ten model przewiduje takie wzory do obliczenia cen europejskich opcji kupna *(call)* C_{bs} i europejskich opcji sprzedaży *(put)* P_{bs} [Ong, 1996, s. 178]:

$$C_{bs}\left(S,K,\sigma,g,\tau,r\right)=Se^{-g\tau}N(d_{1bs})-Ke^{-r\tau}N(d_{2bs}),$$

$$P_{bs}\left(S,K,\sigma,g,\tau,r\right)=Ke^{-r\tau}N(-d_{2bs})-Se^{-g\tau}N(-d_{1bs}),$$

$$d_{1bs}=\frac{\ln\left(S/K\right)+\left(r-g+\left(\sigma^{2}/2\right)\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}=d_{2bs}+\sigma\sqrt{\tau},$$

$$d_{2bs}=\frac{\ln\left(S/K\right)+\left(r-g-\left(\sigma^{2}/2\right)\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}=d_{1bs}-\sigma\sqrt{\tau},$$

gdzie:
S – cena aktywu bazowego (akcji),
K – cena wykonania opcji,
σ – implikowana zmienność ceny aktywu bazowego,
g – roczna stopa dywidend,
τ – termin do wygaśnięcia opcji,
r – stopa procentowa bez ryzyka.

W celu opracowania metody wyceny opcji wymiany o stochastycznej zmienności ceny aktywu bazowego jako podstawowy weźmiemy opisany wyżej model. Załóżmy, że spełniają się wszystkie założenia wspomnianego modelu z wyjątkiem jednego – że zmienność ceny aktywu bazowego jest wartością stałą.

Dokładniej ujmując, zbadamy proces kształtowania się cen opcji wymiany pod warunkiem, że parametr zmienności ceny aktywu bazowego jest parametrem losowym. Takie założenie przybliża nas do realnych parametrów zmienności na rynkach spot aktywów bazowych (cen papierów wartościowych, kursów walutowych, stóp procentowych, indeksów giełdowych etc.). Dla realizacji naszego zadania wykorzystamy teorię procesów stochastycznych.

ALGORYTM WYCENY OPCJI WYMIANY O STOCHASTYCZNEJ ZMIENNOŚCI AKTYWÓW BAZOWYCH

Będziemy badać proces kształtowania się ceny opcji europejskiej, której portfel inwestycyjny w ogólnym przypadku składa się z $n+1$ aktywów, w tym:

a) n aktywów ryzykownych, w jakich stochastyczne procesy cen aktywów bazowych $I_1, \ldots, I_n$ opisują się zmodyfikowanym równaniem stochastycznym typu Blacka-Scholesa z danymi procesami Gaussa-Wienera $W_1(\tau), \ldots, W_n(\tau)$ i odpowiednimi początkowymi warunkami;

b) jednego aktywu bazowego bez ryzyka, którego to aktywu proces ceny $K_\tau = K_T \exp(-r\tau)$ zależy od stałej stopy procentowej bez ryzyka.

Zakładamy, że są spełnione wszystkie założenia modelu Blacka-Scholesa z wyjątkiem tego, iż odpowiednie wariancje $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$ cen aktywów bazowych mają być stałe. Co do tych parametrów zastosowaliśmy założenie o charakterze bardziej ogólnym, niż w klasycznym modelu, a mianowicie, założyliśmy, że wariancja σ_j^2 ceny j-tego aktywu bazowego I_j nie jest stałą wartością, a zależy od pewnej losowej zmiennej $Y_j \in (0, +\infty)$ o rozkładzie logarytmiczno-normalnym $\ln Y_j \quad \mathbf{N}(\mathbf{m}_j, \delta_j^2)$. Zależność tę możemy scharakteryzować w sposób następujący: uważamy, że cena j-tego aktywu bazowego $I_j(\tau)$ wyznacza się przez proces $W_j(\tau)$ w następującej zmodyfikowanej postaci:

$$(1) \quad I_j(\tau, r, g_j, \sigma_j) = Y_j I_j(T) \exp\left(\left(r - g_j - \frac{\sigma_j^2}{2}\right)\tau + \sigma_j W_j(\tau)\right), \ j = 1, \ldots, n,$$

gdzie:

T – moment wygaśnięcia opcji;

g_j – stała stopa zwrotu z j-tego aktywu bazowego;

$\tau = T - t$ – termin do wygaśnięcia opcji;

r – stała stopa procentowa bez ryzyka;

σ_j – odchylenie standardowe ceny aktywu bazowego $I_j(\tau, r, g_j, \sigma_j)$.

Zrozumiałe jest, że w przypadku $Y_j = const$ otrzymamy klasyczny model dla portfela inwestycyjnego składającego się z $n+1$ aktywów z uwzględnieniem stopy zwrotu z aktywów bazowych.

Z założenia Blacka-Scholesa o braku na rynku możliwości arbitrażu, jakie zachowujemy dla naszego modelu zmodyfikowanego, wynika istnienie miary prawdopodobieństwa P, względem której ceny aktywów bazowych $I_1(\tau, r, g_1, \sigma_1), \ldots, I_n(\tau, r, g_n, \sigma_n)$ będą $\mathcal{F}_t$ – martyngałami, gdzie $\mathcal{F}_t$ – minimalna filtracja, generowana danymi procesami Gaussa-Wienera

$W_1(\tau),...,W_n(\tau)$. Jako wynik, cena opcji z funkcją wypłaty $H\left(I_1(T),\ldots,I_n(T),K\right)$ ma postać warunkowej wartości oczekiwanej

$$V_\tau\left(I_1(T),\ldots,I_n(T),K_T\right)=E\left[H\left(I_1(T),\ldots,I_n(T),K_T\right)\mid \mathsf{F}_t\right].$$

Dalej obliczona została w postaci jawnej ta warunkowa wartość oczekiwana przez znane parametry opcji. Odpowiedni wzór dla wyceny opcji europejskiej przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}V_\tau=E\Bigg[H\Bigg(&\exp\left(m_1+\frac{\sigma_1^2}{2}\right)I_1^W\left(\tau,r,g_1,\upsilon_1\right),...,\\&\exp\left(m_n+\frac{\sigma_n^2}{2}\right)I_n^W\left(\tau,r,g_n,\upsilon_n\right),K_T\Bigg)\Bigg|\,\mathsf{F}\Bigg],\end{aligned}\tag{2}$$

gdzie $$I_j^W\left(\tau,r,g_j,\upsilon_j\right)=I_j\left(T\right)\exp\left(\left(r-g_j-\upsilon_j^2/2\right)\tau+\upsilon_jW_j\left(\tau\right)\right),$$
$$\upsilon_j^2=\sigma_j^2+\delta_j^2/\tau,\ \ (j=1,...,n)$$

z jedynymi rozwiązaniami pomocniczego układu n klasycznych równań Black-Scholesa

$$dI_j^W\left(\tau,r,g_j,\upsilon_j\right)=r_jI_j^W\left(\tau,r,g_j,\upsilon_j\right)d\tau+\upsilon_jI_j^W\left(\tau,r,g_j,\upsilon_j\right)dW_j\left(\tau\right),$$
$$I_j^W\left(\tau,r,g_j,\upsilon_j\right)\big|_{\tau=0}=I_j\left(T\right).$$

Na skutek czego otrzymujemy taki **algorytm** wyliczenia ceny opcji europejskiej $V_\tau=E\left[H\left(I_1(T),\ldots,I_n(T),K_T\right)\mid \mathsf{F}_t\right]$ o funkcji wypłaty $H\left(I_1(T),\ldots,I_n(T),K_T\right)$:

aby znaleźć cenę opcji o stochastycznej zmienności σ_j cen aktywów bazowych wystarczy w formule ceny takiej opcji przy stałej zmienności cen aktywów bazowych zamienić σ_j na $\upsilon_j^2=\sigma_j^2+\delta_j^2/\tau$, a I_j – na $\exp\left(m_j+\delta_j^2/2\right)I_j$.

Zatem w ramach naszego modelu wektor standardowych odchyleń cen aktywów bazowych jest losowo zmiennym i ma postać

$$\left(\sigma_1,...,\sigma_n\right)=\left(\sqrt{\upsilon_1^2-\delta_1^2/\tau},...,\sqrt{\upsilon_n^2-\delta_n^2/\tau}\right),$$

gdzie $\left(\upsilon_1^2,...,\upsilon_n^2\right)$ – stała składowa wektora wariancji $\left(\sigma_1^2,...,\sigma_n^2\right)$ charakteryzująca wkład w cenę procesów Gaussa-Wienera $W_1,...,W_n$, a $\left(\delta_1^2/\tau,...,\delta_n^2/\tau\right)$ –

jego zmienna składowa charakteryzująca wkłady w cenę właśnie losowego wektora $(Y_1,...,Y_n)$ z odchyleniami standardowymi, odpowiednio $(\delta_1,...,\delta_n)$. Mnożniki

$$\exp\gamma_j = \exp\left(m_j + \delta_j^2 \big/ 2\right), (j = 1,...,n)$$

nie zależą od procesu Gaussa-Wienera W_j i charakteryzują ryzyko inwestycji wywołane losową zmienną Y_j taką, że $\ln Y_j \quad \mathbf{N}\left(m_j, \delta_j^2\right)$.

Zastosujemy zaproponowany algorytm do wyceny opcji wymiany, które to opcje zaliczane są do grupy opcji niestandardowych, nazywanych opcjami egzotycznymi.

SPOSÓB DZIAŁANIA OPCJI WYMIANY

Opcje wymiany dają ich posiadaczom możliwość wymiany jednego aktywu bazowego na inny. Takie opcje należą do klasy opcji korelacyjnych, ponieważ wystawia się je na dwa aktywy bazowe, a nie na jeden, jak w przypadku opcji standardowych. Nazwa „korelacyjne” związana jest z tym faktem, że w trakcie wyceny takich opcji należy uwzględniać współczynnik korelacji pomiędzy aktywami bazowymi.

Opcje wymiany po raz pierwszy zostały opisane w literaturze naukowej w 1978 roku przez W. Margraba [Margrabe, 1978, s. 177–186], który znalazł algorytm wyceny opcji wymiany jednego aktywu bazowego na inny. W 1983 roku J.O. Grabbe [Grabbe, 1983, s. 239–253] zapropronował algorym wyceny opcji wymiany walut, a w 1994 roku X.Xu i S.J. Taylor [Xu, Taylor, 1994, s. 57–74] poddali analizie strukturę terminową modeli wyceny opcji wymiany walut. W 1998 roku J.M. Campa i P.H.K. Chang [Campa, Chang, 1998, s. 855–880] rozwinęli korelacyjne metody prognozowania cen dla opcji wymiany walut, natomiast G. Poitras [Poitras, 1998, s. 487–517] do wyceny tych derywatów zastosował teorię arytmetycznego ruchu Browna. Dwa lata później C.A.Walter i J.A. Lopez [Walter, Lopez, 2000, s. 65–81] rozwinęli metodę implikowanej korelacji w modelach wyceny opcji wymiany walut.

Opiszemy cechy charakterystyczne opcji wymiany (nazywanych też opcjami wymiennymi), ich funkcje wypłaty i zbudujemy modele do ich wyceny przy losowej zmienności cen aktywów bazowych.

Ogólnie mowiąc, nie ma rozróżnienia pomiędzy opcją wymienną typu *call* i typu *put*. Jednak jeśli bliżej się przyjrzeć konstrukcji tych instrumentów widać, że opcia wymienna może być interpretowana jako *call* wystawiona na jeden z aktywów, mająca cenę wykonania równą cenie drugiego aktywu w momencie wykonania opcji lub jako opcja *put* na drugi aktyw z ceną wykonania w wysokości wartości aktywu pierwszego w momencie wykonania opcji [Pruchnicka-Grabias, 2006, s. 116].

FUNKCJA WYPŁATY I MODELE WYCENY OPCJI WYMIANY

Do wyceny europejskich opcji wymiany zastosujemy opracowany wyżej algorytm. W tym celu zakładamy, że opcja wystawiona jest na dwa ryzykowne aktywa bazowe, których ceny opisywane są procesami $I_1(\tau, r, g_1, \sigma_1)$, $I_2(\tau, r, g_2, \sigma_2)$ postaci (1). Funkcja wypłaty opcji wymiany **drugiego** *aktywu bazowego na pierwszy* ma postać:

$$payoff = \max\left[I_1 - I_2, 0\right], \tag{3}$$

gdzie: I_1 – cena spot pierwszego aktywu bazowego w momencie T wygaśnięcia opcji;
I_2 – cena spot drugiego aktywu bazowego w momencie T wygaśnięcia opcji.

Przypomnijmy, jak wygląda funkcja wypłaty opcji standardowych:

$$payoff_{call} = \max\left[S - K, 0\right], \tag{4}$$

$$payoff_{put} = \max\left[K - S, 0\right]. \tag{5}$$

Jak widać, funkcja wypłaty opcji wymiany (3) jest analogiczna do funkcji wypłaty standardowej opcji kupna (4) z tą różnicą, że cena wykonania K jest zastąpiona przez cenę drugiego aktywu I_2. Zatem faktycznie opcje wymiany rozpatrywać można jako standardową opcję kupna wystawioną na pierwszy aktyw z ceną wykonania równą przyszłej cenie spot aktywu drugiego (w momencie realizacji opcji). Z drugiej strony, funkcja wypłaty opcji wymiany (3) podobna jest do funkcji wypłaty standardowej opcji sprzedaży (5) z ceną wykonania równą przyszłej cenie spot I_1 (w momencie realizacji opcji) aktywu pierwszego.

Cechą charakterystyczną opcji wymiany jest odwrotna zależność pomiędzy wartością współczynnika korelacji i ceną opcji. To znaczy, że wraz ze wzrostem współczynnika korelacji pomiędzy dwoma aktywami bazowymi cena opcji wymiany maleje i na odwrót.

Funkcję wypłaty opcji wymiany **drugiego** *aktywu bazowego na pierwszy* można też zapisać w innej postaci:

$$\max\left[I_1 - I_2, 0\right] = \max\left[I_1, I_2\right] - I_2 \text{ lub}$$

$$\max\left[I_1(T)-I_2(T),0\right]=I_1(T)-\min\left[I_1(T),I_2(T)\right].$$

Przy stałej wartości parametrów zmienności σ_j cen aktywów bazowych $I_j\left(\tau,r,g_j,\sigma_j\right)$, czyli w przypadku $Y_j=1$, do wyceny opcji wymiany **drugiego** *aktywu bazowego na pierwszy* można zastosować wzór (2). Według tego wzoru cena opcji może być obliczona jako warunkowa wartość oczekiwana od funkcji wypłaty opcji z uwzględnieniem tego faktu, że procesy $I_j\left(\tau,r,g_j,\sigma_j\right)$ są martyngałami. Przy takich założeniach w [Margrabe, 1978, s. 178] została obliczona warunkowa wartość oczekiwana i wyprowadzona taka formuła wyceny opcji wymiany:

$$EXC_{12}=I_1e^{-g_1\tau}N\left(d_{e1}\right)-I_2e^{-g_2\tau}N\left(d_{e2}\right),(6)$$

$$d_{e2}\left(\sigma_1,\sigma_2,I_1,I_2\right)=\left[\ln\left(\frac{I_1}{I_2}\right)+\left(g_2-g_1-\frac{1}{2}\sigma_a^2\right)\tau\right]\Big/\left(\sigma_a\sqrt{\tau}\right),$$

$$d_{e1}\left(\sigma_1,\sigma_2,I_1,I_2\right)=d_{e2}\left(\sigma_1,\sigma_2,I_1,I_2\right)+\sigma_a\sqrt{\tau},$$

$$\sigma_a\left(\sigma_1,\sigma_2,I_1,I_2\right)=\sqrt{\sigma_1^2-2\rho\left(I_1,I_2\right)\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2},$$

gdzie: g_j – stopa zwrotu z j-tego aktywu bazowego, $j=1,2$,

$\rho\left(I_1,I_2\right)$ – współczynnik korelacji pomiędzy aktywami bazowymi,

σ_j – stały parametr zmienności j- tego aktywu bazowego.

Ponieważ w rzeczywistości parametr zmienności rzadko bywa stałym (wręcz jest losowy), zatem zastosujemy opisany wyżej **algorytm** do znalezienia formuły typu (6), za pomocą której można obliczyć cenę europejskiej opcji wymiany **drugiego** *aktywu bazowego na pierwszy* pod warunkiem, że zmienności cen σ_j obu aktywów bazowych mają charakter stochastyczny. Zgodnie z algorytmem, we wzorze (6) należy zastąpić σ_j przez υ_j, a I_j – przez $\exp\left(m_j+\frac{\delta_j^2}{2}\right)I_j$. Wówczas wzór przyjmuje postać:

$$EXC_{12}^s=$$

$$I_1\exp\left(-g_1\tau+m_1+\frac{\delta_1^2}{2}\right)N\left[d_{e1}\left(\upsilon_1,\upsilon_2,I_1\exp\left(m_1+\frac{\delta_1^2}{2}\right),I_2\exp\left(m_2+\frac{\delta_2^2}{2}\right)\right)\right]-$$

$$I_2\exp\left(-g_2\tau+m_2+\frac{\delta_2^2}{2}\right)N\left[d_{e2}\left(\upsilon_1,\upsilon_2,I_1\exp\left(m_1+\frac{\delta_1^2}{2}\right),I_2\exp\left(m_2+\frac{\delta_2^2}{2}\right)\right)\right],$$

gdzie: $\upsilon_j^2=\sigma_j^2+\delta_j^2\big/\tau$.

Warto zauważyć, że współczynniki $\gamma_j = m_j + \frac{\delta_j^2}{2}$ charakteryzują ryzyko inwestycji w opcje wymiany, które to ryzyko jest wywołane przez losowe zmienne Y_j o rozkładzie logarytmiczno-normalnym $\ln Y_j \quad \mathbf{N}\left(\mathbf{m}_j, \delta_j^2\right)$.

Formuły dla wyceny opcji wymiany **pierwszego** *aktywu na drugi* można wyprowadzić w sposób analogiczny. Przy stałym parametrze zmienności formuła ma postać:

$$EX_{21} = I_2 e^{-g_2\tau} N\left(-d_{e2}\right) - I_1 e^{-g_1\tau} N\left(-d_{e1}\right).$$

Natomiast w przypadku stochastycznego parametru zmienności cen aktywów bazowych formuła pryjmuje następującą postać:

$$EXC_{21}^{s} =$$

$$I_2 \exp\left(-g_2\tau + m_2 + \frac{\delta_2^2}{2}\right) N\left[-d_{e2}\left(\upsilon_1, \upsilon_2, I_1 \exp\left(m_1 + \frac{\delta_1^2}{2}\right), I_2 \exp\left(m_2 + \frac{\delta_2^2}{2}\right)\right)\right]$$

$$-I_1 \exp\left(-g_1\tau + m_1 + \frac{\delta_1^2}{2}\right) N\left[-d_{e1}\left(\upsilon_1, \upsilon_2, I_1 \exp\left(m_1 + \frac{\delta_1^2}{2}\right), I_2 \exp\left(m_2 + \frac{\delta_2^2}{2}\right)\right)\right].$$

PRAKTYCZNE OBLICZENIA I ZASTOSOWANIA OPCJI WYMIANY

Opcje wymiany można wykorzystywać w celach hedgingowych, jak i w celu otrzymania dochodu inwestycyjnego. Jeśli inwestor trzymający w swoim portfelu akcje jednej spółki akcyjnej ma wątpliwości co do kształtowania się ich cen w przyszłości, to dla zabezpieczenia pozycji w tych aktywach może on zastosować opcje z prawem wymiany jednej (lub kilku) posiadanych akcji na inną (lub odpowiednią ilość) akcji (ewentualnie innych aktywów bazowych).

Takie opcje są efektywnymi instrumentami wykorzystywanymi też w celu ograniczenia ryzyka walutowego zagrażającego najczęściej importerom i eksporterom przy rozliczeniu transakcji z zagranicą. Wymiana pewnej ilości jednej waluty na inną zabezpiecza inwestora przed ewentualnymi fluktuacjami kursów walutowych [Solińska, Iwaszczuk, 2008, s. 399–405].

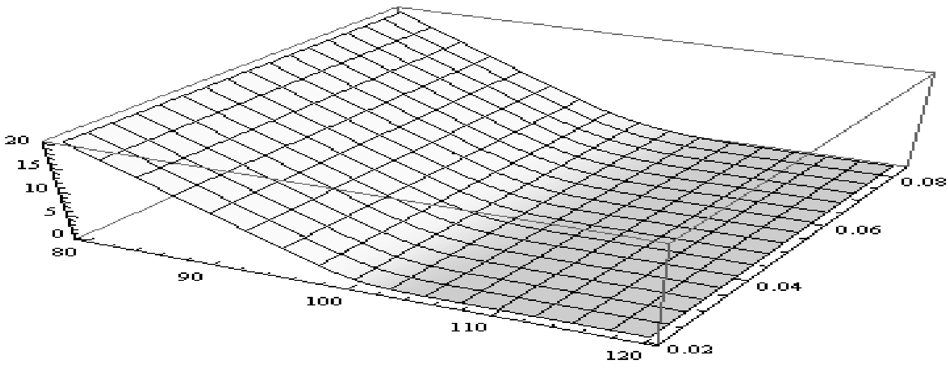
Na podstawie opisanych wyżej wzorów dokonamy wyceny opcji wymiany. Poza tym przeanalizujemy, jak reagują one na zmiany niektórych parametrów opcji. W tym celu wykorzystamy możliwości pakietu “Mathematica”.

Zmieniając cenę pierwszego aktywu bazowego od 80$ do 120$ zbadaliśmy zmiany cen opcji wymiany. Takie badania stwarzają możliwości zastosowania podobnych strategii z udziałem innych aktywów bazowych. Poza tym oprogramowanie pozwala przeanalizować wpływ innych parametrów na ceny takich derywatów, na przykład okresu ważności opcji. Otrzymane rezultaty (tabela 1, rysunek 1) ilustrują odwrotną zależność ceny opcji od obu wspomnianych parametrów. Zatem inwestorom zaleca się kupowanie opcji o wyższej cenie wykonania, wystawionych na dłuższe okresy czasu. Warto zauważyć, że tu i dalej na rysunkach pionowo zaznaczona jest cena opcji, a czas wyrażony jest w latach (od 0.02 do 0.08 roku).

Tabela 1. Ceny opcji w zależności od ceny pierwszej akcji i okresu ważności

Cena pierwszej akcji/ okres ważności opcji	1 tydzień	2 tygodnie	3 tygodnie	4 tygodnie
80 $	20.0000	19.9999	19.9997	19.9994
90 $	10.0208	10.0416	10.0639	10.0900
100 $	0.86759	1.23703	1.52386	1.76768
110 $	$1.85 \cdot 10^{-6}$	0.00072	0.00650	0.02150
120 $	0.00000	$4.1 \cdot 10^{-10}$	$3.3 \cdot 10^{-7}$	0.00001

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 1. Zależność ceny opcji od ceny pierwszej akcji i okresu ważności

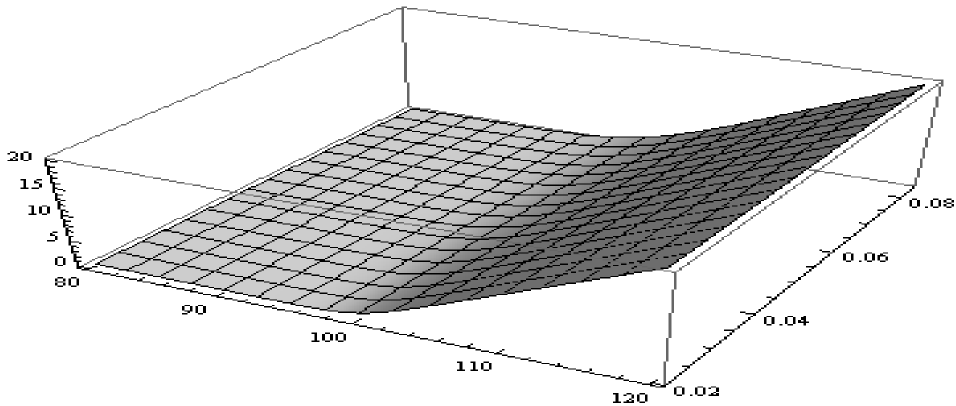
Źródło: opracowanie własne.

Rozpatrzymy przypadek zmiany ceny drugiej akcji w tym samym czasie. Otrzymane rezultaty (tabela 2, rysunek 2) świadczą o tym, że wraz ze wzrostem obu parametrów cena opcji też rośnie, i odwrotnie. Takie badania pozwalają inwestorom wybrać strategię o najniższych kosztach, jak również wybrać optymalny wariant względem „koszty-ewentualny dochód”.

Tabela 2. Ceny opcji w zależności od ceny drugiej akcji i okresu ważności

Cena drugiej akcji / okres ważności opcji	1 tydzień	2 tygodnie	3 tygodnie	4 tygodnie
80 $	0.0000	$2.7 \cdot 10^{-14}$	$4.4 \cdot 10^{-10}$	$6.5 \cdot 10^{-8}$
90 $	$1.5 \cdot 10^{-7}$	0.00018	0.00241	0.00969
100 $	0.86759	1.23703	1.52386	1.76768
110 $	10.0249	10.0503	10.0797	10.1161
120 $	20.0083	20.0165	20.0245	20.0325

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 2. Zależność ceny opcji od ceny drugiej akcji i okresu ważności

Źródło: opracowanie własne.

Opcje wymiany wystawione na ceny towarów lub surowców mogą ubezpieczać przed ryzykiem cenowym na rynkach towarowych. Opcje, w których jako aktywy bazowe wykorzystywane są papiery wartościowe, chronią ich nabywcę przed ryzykiem cenowym na rynkach kapitałowych. Natomiast w celu zabezpieczenia przed ryzykiem walutowym w strategiach opcyjnych należy stosować opcję wymiany walut. W ten sposób budowane są strategie hedgingowe.

Opcje wymiany mogą być wykorzystywane przez wiele różnych podmiotów gospodarczych również w innych celach – zarobkowych, arbitrażowych, upłynnienia zarówno rynku opcji, jak i rynku instrumentu bazowego. Jednak przedsiębiorstwom o różnych rodzajach działalności rekomendowane jest zajęcie długich pozycji (kupno) w opcjach, które to pozycje zabezpieczają przed ryzykiem związanym z ich działalnością.

Natomiast krótką pozycję (sprzedaż), która jest bardziej ryzykowna, najczęściej zajmują wyspecjalizowane instytucje finansowe. Takie instytucje potrafią budować skomplikowane strategię z udziałem opcji ograniczające lub eliminujące ryzyko krótkiej pozycji w opcji w razie zmiany sytuacji rynkowej na niekorzyść tej instytucji. Z drugiej strony w sprzyjających warunkach rynkowych instytucja zaliczy pozytywny wynik finansowy.

Należy podkreślić, że opcje chroniąc swoich posiadaczy przed negatywnymi skutkami zmian rynkowych, zachowują też dla nich możliwość skorzystania ze zmian pozytywnych.

PODSUMOWANIE

Otóż, opcje wymiany, jak i inne rodzaje opcji, są popularne zarówno wśród inwestorów pozbywających się ryzyka, jak i wśród inwestorów zawierających transakcje na rynkach terminowych wyłącznie w celach zarobkowych. Takie instrumenty pochodne pozwalają bowiem nie tylko ryzyko redukować, ale też efektywnie zarządzać nim umiejętnie wykorzystując współczesne modele wyceny opcji. Przy czym bardzo ważnym momentem jest wykorzystanie modeli najbardziej przybliżonych do realnych procesów zachodzących na rynku.

LITERATURA

Albrecher H., Predota M., 2002, *Bounds and Approximations for Discrete Asian Options in a Variance-Gamma Model*, “Grazer Math. Ber.”.

Campa J.M., Chang P.H.K., 1998, *The Forecasting Ability of Correlations Implied in Foreign Exchange Options*, “Journal of International Money and Finance”, vol. 17.

Carr P., Wu L., 2004, *Time-Changed Levy Processes and Option Pricing*, “Journal of Financial Economics”, vol. 71.

Duan J.C., Simonato J.G., 1998, *American Option Pricing under GARCH by a Markov Chain Approximation*, Working paper, Rothman School of Management, University of Toronto.

Geman H., Yor V., 1993, *Bessel Process, Asian Options and Perpetuities*, “Mathematical Finance”, vol. 3, no. 4.

Grabbe J.O., 1983, *The Pricing of Call and Put Option on Foreign Exchange*, “Journal of International Money and Finance”, vol. 2.

Margrabe W., 1978, *The Value of an Option to Exchange One Asset for Another*, “Journal of Finance”, vol. 33, no. 1.

Nunes J.P., 2006, *Barrier Options on Spot LIBOR Rates under Multi-Factor Gaussian HJM Models*, “Journal of Derivatives”, vol. 14, no. 1.

Ong M., 1996, *Exotic Options: The Market and Their Taxonomy* [w:] *The Handbook of Exotic Options. Instruments, Analysis and Applications*, red. I. Nelken, IRWIN Professional Publishing, Chicago.

Poitras G., 1998, *Spread Options, Exchange Options, and Arithmetic Brownian Motion*, “Journal of Futures Markets”, vol. 18.

Pruchnicka-Grabias I., 2006, *Egzotyczne opcje finansowe. Systematyka, wycena, strategie*, CeDeWu, Warszawa.

Solińska M., Iwaszczuk N., 2008, *Rola małych i średnich przedsiębiorstw w gospodarce rynkowej*, „Zeszyty Naukowe Lwowskiego Państwowego Uniwersytetu Spraw Wewnętrznych", nr 2.

Tsitsiklis J., Van Roy B., 1999, *Optimal Stopping of Markov Processes: Hilbert Space Theory, Approximation Algorithm, and an Application to Pricing High-Dimensional Financial Derivatives*, "IEEE Transactions on Automatic Control", vol. 44.

Walter C.A., Lopez J.A., 2000, *Is Implied Correlation Worth Calculating? Evidence from Foreign Exchange Options*, "Journal of Derivatives", vol. 7, no. 3.

Xu X., Taylor S.J., 1994, *The Term Structure of Volatility Implied by Foreign Exchange Options*, "Journal of Financial and Quantitative Analysis", vol. 29.

Streszczenie

W artykule opisano proces badania sposobów zarządzania ryzykiem z wykorzystaniem instrumentów pochodnych. Wśród tych ostatnich najbardziej przydatne okazały się opcje standardowe i niestandardowe. W sposób szczegółowy przeanalizowany został jeden z wielu rodzajów opcji niestandardowych – opcje wymiany. Dla tych opcji przeprowadzono badania funkcji wypłaty i znanych modeli wyceny przy stałej zmienności wartości aktywu bazowego. Poza tym opracowano algorytm i modele wyceny europejskiej opcji wymiany o stochastycznym parametrze zmienności wartości aktywu bazowego.

Innovative Ways of Risk Management of an Enterprise Activity Using Option Strategies

Summary

In the article the ways of risk management with use of derivatives are investigated. Among them the most effective appeared standard (vanilla) and non-standard (exotic) options. One of many types of exotic options, namely an exchange options has been analysed in more details. For these options researches of payment function and known pricing models are carried out at the fixed volatility of underlying asset price. Except for it the algorithm and pricing models of European exchange option at the stochastic volatility of underlying asset price is developed.