

Zagadnienia do egzaminu licencjackiego na kierunku Matematyka

Na egzaminie licencjackim student powinien:

- 1) omówić wyniki zawarte w pracy licencjackiej, posługując się swobodnie pojęciami i twierdzeniami zamieszczonymi w pracy oraz bezpośrednio związanymi z pracą,
- 2) wykazać się dobrą znajomością pojęć i twierdzeń ujętych w następujących zagadnieniach,

Przedmioty kierunkowe

Wstęp do logiki i teorii mnogości

1. **Rachunek zbiorów:** działania na zbiorach, inkluzje, działania uogólnione na zbiorach.
2. **Liczby naturalne:** aksjomatyka Peano, indukcja matematyczna, rekurencja.
3. **Relacje:** iloczyn kartezjański zbiorów, relacje, działania na relacjach, klasyfikacja relacji, relacja równoważnościowa, klasy abstrakcji.
4. **Funkcje jako relacje:** własności funkcji, obrazy i przeciwobrazy zbiorów wyznaczone przez funkcje.
5. **Moc zbiorów:** zbiory skończone i nieskończone, równoliczność zbiorów, zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne, liczby kardynalne.
6. **Relacja porządku:** porządek częściowy, porządek liniowy, porządek gęsty, porządek ciągły. dobry porządek, Lemat Kuratowskiego-Zorna, pewnik wyboru.

Rachunek różniczkowy i całkowy

1. **Zbiory liczbowe:** aksjomatyka zbioru liczb rzeczywistych, kresy zbiorów.
2. **Funkcje jednej i wielu zmiennych:** określenie i własności funkcji jednej i wielu zmiennych, funkcja odwrotna, składanie funkcji, charakterystyka funkcji elementarnych.
3. **Ciągi liczbowe:** ciągi monotoniczne, ciągi ograniczone, zbieżność ciągów, granica niewłaściwa ciągu, własności arytmetyczne granicy, twierdzenie o trzech ciągach, ciąg Cauchy'ego, Twierdzenie Bolzano – Weierstrassa.
4. **Szeregi liczbowe:** zbieżność szeregów, szereg geometryczny i harmoniczny, kryteria zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych, zbieżność bezwzględna i warunkowa, szereg naprzemienny i kryterium Leibniza, działania na szeregach zbieżnych.
5. **Granica funkcji jednej i wielu zmiennych:** definicja Cauchy'ego i Heinego granicy funkcji jednej i wielu zmiennych, własności arytmetyczne granic, granice jednostronne funkcji jednej zmiennej, asymptoty funkcji.
6. **Ciągłość funkcji jednej i wielu zmiennych:** pojęcie ciągłości funkcji jednej i wielu zmiennych, własności funkcji ciągłych, jednostajna ciągłość funkcji.

7. **Pochodna funkcji jednej zmiennej i jej zastosowania:** definicja pochodnej, interpretacja fizyczna i geometryczna pochodnej, różniczkowalność, ciągłość a różniczkowalność funkcji, podstawowe twierdzenia o pochodnych, twierdzenia o wartości średniej, pochodne wyższych rzędów, reguła de l'Hospitala, monotoniczność i ekstrema lokalne, wypukłość i punkty przegięcia, wzór Taylora.
8. **Pochodna funkcji wielu zmiennych i jej zastosowania:** pochodne kierunkowe i cząstkowe funkcji wielu zmiennych, różniczkowalność funkcji wielu zmiennych, różniczka zupełna, pochodne cząstkowe wyższych rzędów, ekstrema lokalne i warunkowe funkcji wielu zmiennych.
9. **Całka nieoznaczona:** funkcja pierwotna i określenie całki nieoznaczonej, całkowanie przez części i przez podstawienie, całkowanie funkcji wymiernych, niewymiernych, trygonometrycznych.
10. **Całka oznaczona:** całka Riemanna, warunki wystarczające całkowalności funkcji w sensie Riemanna, interpretacja geometryczna całki oznaczonej, własności całki oznaczonej, wzór Newtona – Leibniza, zastosowania geometryczne i fizyczne całek.
11. **Ciągi i szeregi funkcyjne:** zbieżność punktowa i jednostajna ciągów i szeregów funkcyjnych, Kryterium Weiersteassa zbieżności jednostajnej szeregu, własności funkcyjne granicy ciągu (szeregu) funkcyjnego zbieżnego jednostajnie (różniczkowanie i całkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych), szeregi potęgowe, rozwinięcie funkcji w szeregi Taylora i Maclaurina.
12. **Całki wielokrotne:** podstawowe własności całek wielokrotnych (podwójnych i potrójnych), zamiana całki wielokrotnej na całki iterowane, Twierdzenia o zamianie zmiennych, zastosowania całek wielokrotnych.
13. **Równania różniczkowe:** pojęcie równania różniczkowego oraz jego rozwiązania, zagadnienie Cauchy'ego, Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczność rozwiązań równania różniczkowego, przykłady równań całkownych.

Algebra liniowa z geometrią

1. **Ciało liczb zespolonych:** różne postaci liczb zespolonych, działania na liczbach zespolonych, wzór de Moivre'a, pierwiastki z liczby zespolonej, interpretacja geometryczna podzbiorów zbioru liczb zespolonych.
2. **Przestrzenie liniowe:** liniowa zależność i niezależność wektorów, baza przestrzeni liniowej, wymiar przestrzeni liniowej, podprzestrzeń liniowa.
3. **Macierze i wyznaczniki:** działania na macierzach, definicja wyznacznika, własności wyznaczników, metody obliczania wyznaczników, macierz odwrotna, minory i rząd macierzy.
4. **Układy równań liniowych:** twierdzenie Kroneckera-Capellego, wzory Cramera, postać macierzowa układu równań.
5. **Odwzorowania liniowe:** definicja odwzorowania liniowego, jądro i obraz odwzorowania liniowego, rząd odwzorowania liniowego, reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego, macierz przejścia, macierz odwzorowania liniowego po zmianie bazy.
6. **Endomorfizmy:** wartość własna i wektor własny endomorfizmu, wielomian charakterystyczny.

7. **Formy kwadratowe:** odwzorowanie dwuliniowe, macierz i rząd odwzorowania dwuliniowego, twierdzenie Lagrange'a i Sylwestera, diagonalizacja formy kwadratowej.
8. **Euklidesowe przestrzenie wektorowe:** iloczyn skalarny, norma wyznaczona przez iloczyn skalarny, nierówność Schwarz'a, baza ortonormalna, macierz ortogonalna.
9. **Wektory:** działania na wektorach w \mathbb{R}^3 : dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez skalar, iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy.
10. **Geometria analityczna w \mathbb{R}^2 :** prosta na płaszczyźnie, definicje i równania krzywych stożkowych.
11. **Geometria analityczna w \mathbb{R}^3 :** prosta i płaszczyzna w przestrzeni, powierzchnie obrotowe w \mathbb{R}^3 (walce, stożki, hiperboloidy, paraboloidy).

Algebra

1. **Struktury algebraiczne:** grupy, pierścienie, ciała – definicje, przykłady.
2. **Podgrupy:** podgrupy niezmiennicze, warstwy, twierdzenie Lagrange'a. podgrupy normalne. grupy ilorazowe.
3. **Homomorfizm grup:** definicja i twierdzenia dotyczące homomorfizmów.
4. **Grupa cykliczna. Grupy abelowe skończenie generowane.**
5. **Pierścienie:** określenie pierścienia, pierścienia całkowitego, podpierścienia, ideału.
6. **Pierścień ilorazowy. Ideały pierwsze i maksymalne, charakteryzacja w terminach pierścieni ilorazowych.**
7. **Ciało ułamków pierścienia całkowitego.**
8. **Pierścienie wielomianów:** definicja wielomianu, działania na wielomianach, pierścienie wielomianów, ciało funkcji wymiernych, pierwiastki wielomianu i ich krotność, dzielenie wielomianów, twierdzenia dotyczące wielomianów.
9. **Podzielność w pierścieniach całkowitych:** relacja podzielności w pierścieniach całkowitych, relacja stowarzyszenia, grupa jedności pierścienia, rozkład na czynniki, elementy nierozkładalne, elementy pierwsze, pierścienie z rozkładem, pierścienie Gaussa, największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność., pierścienie noetherowskie, pierścienie główne, pierścienie Euklidesa, algorytm Euklidesa.
10. **Podzielność w pierścieniach wielomianów:** wielomiany pierwotne, wielomiany nierozkładalne, twierdzenie Gaussa, kryteria przywiedności i nieprzywiedności wielomianów, rozkład funkcji wymiernych na ułamki proste.

Elementy topologii

1. **Przestrzenie metryczne:** definicja przestrzeni metrycznej, przykłady, kula otwarta, domknięta w przestrzeni metrycznej; wnętrze, domknięcie i brzeg zbioru w przestrzeni metrycznej; zbiory otwarte, zbiory domknięte; odległość punktu od zbioru; średnica zbioru.
2. **Ciągi w przestrzeniach metrycznych:** zbieżność ciągów w przestrzeni metrycznej, podstawowe twierdzenia; ciąg Cauchy'ego, przestrzeń metryczna zupełna; twierdzenie Banacha o punkcie stałym.
3. **Pojęcie przestrzeni topologicznej:** różne sposoby wprowadzania topologii, rodzina otwarta, rodzina domknięta, baza przestrzeni topologicznej.

4. **Zbiory w przestrzeniach topologicznych:** wnętrze, domknięcie, brzeg i zbiór punktów skupienia zbioru w przestrzeni topologicznej; różne rodzaje zbiorów w przestrzeni topologicznej: zbiór gęsty, brzegowy, nigdziegęsty, zbiory pierwszej i drugiej kategorii.
5. **Aksjomaty oddzielania i warunki równoważne.**
6. **Funkcje ciągłe w przestrzeniach topologicznych:** definicja i przykłady funkcji ciągłych, warunki równoważne ciągłości; złożenie funkcji ciągłych; homeomorfizmy – definicja, przykłady; odwzorowania otwarte i domknięte.
7. **Różne rodzaje przestrzeni topologicznych:** przestrzenie ośrodkowe, przestrzenie zupełne, przestrzenie zwarte, charakteryzacja zbiorów zwartych w przestrzeniach metrycznych; przestrzenie spójne; własności funkcji ciągłych na zbiorach spójnych.

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

1. **Podstawowe pojęcia:** zdarzenia elementarne i losowe, aksjomaty prawdopodobieństwa.
2. **Zdarzenia niezależne, prawdopodobieństwo warunkowe i wzór Bayesa.**
3. **Kombinatoryczne schematy prawdopodobieństwa:** schemat Bernoulliego, schematy urnowe.
4. **Zmienna losowa, jej rozkład i dystrybuanta, oraz momenty.**
5. **Funkcja prawdopodobieństwa wybranych rozkładów dyskretnych** (dwumianowy, geometryczny, Poissona).
6. **Funkcja gęstości wybranych rozkładów ciągłych** (normalny, wykładniczy).
7. **Rozkład łączny i rozkłady brzegowe pary zmiennych losowych:** niezależność zmiennych.
8. **Twierdzenia graniczne rachunku prawdopodobieństwa.**

Zagadnienia do egzaminu licencjackiego na kierunku matematyka zostały zaakceptowane, większością głosów, przez Radę Instytutu Matematyki na posiedzeniu w dniu 16 września 2013 r. i będą obowiązywały studentów kończących studia pierwszego stopnia na kierunku matematyka od roku akademickiego 2013/2014.