

Parę słów o logice

Logika matematyczna pomaga nam uporządkować nasze myślenie i w sformalizowanym języku matematyki w sposób niepodważalny udowadniać różne twierdzenia, rozróżniać zdania prawdziwe od fałszywych, pozwala na analizowanie zależności przyczynowo skutkowych, uczy jak poprawnie konstruować argumenty, jak unikać błędów logicznych, jest stosowana przy interpretowaniu wyników badań naukowych.

Formalna logika matematyczna bywa nazywana logiką dwuwartościową zakłada bowiem, że każdemu zdaniu można jednoznacznie przypisać wartość prawdy lub wartość fałszu. Pomimo tego, że świat rzeczywisty jest o wiele bardziej skomplikowany i czasem trudno w nim mieć pewność że dane założenie jest w 100% prawdziwe (fałszywe) i w tym realnym życiu logika, nawet ta dwuwartościowa, bywa co najmniej przydatna. Myślenie oparte na jej zasadach towarzyszy ludzkości od zarania dziejów: umiejętność logicznego myślenia pomaga w podejmowaniu decyzji, w argumentowaniu własnych wniosków i poglądów, umożliwia krytyczną ocenę informacji, można chronić przed manipulacją poprzez np. sprawniejsze wyłapywanie sofizmów. Jest podstawą rozumowania nie tylko matematyków czy informatyków (co wydaje się dość oczywiste) ale także filozofów czy prawników.

Jeżeli komuś klasyczna logika klasyfikująca jedynie według kryterium prawda/fałsz wydaje się niewystarczająca by skuteczniej radzić sobie z wieloma niejednoznacznościami i sprzecznościami może zainteresować się różnymi uogólnieniami jej do logiki wielowartościowej np. logiki rozmytej..

W logice **zdaniem logicznym** nazywamy wyrażenie oznajmujące, o którym można jednoznacznie powiedzieć, że jest prawdziwe lub fałszywe. Zdania z reguły oznaczamy małymi literami.

Prawdę oznaczamy przez **1** a fałsz przez **0**.

Proste zdania logiczne można łączyć w bardziej złożone za pomocą **spójników logicznych**:

$\sim$ - **negacji** (czyt. 'nie prawda, że'),

$\wedge$ - **koniunkcji** (czyt. 'i'),

$\vee$ - **alternatywy** (czyt. 'lub'),

$\vee$ - **alternatywy wyłączającej** (czyt. ‘albo’)

$\Rightarrow$ - **implikacji** (czyt. ‘z tego wynika, że’),

$\Leftrightarrow$ - **równoważności** (czyt. ‘wtedy i tylko wtedy gdy’)

p	$\sim p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1

Prawem rachunku zdań (**tautologią**) nazywamy zdanie złożone, które jest zawsze prawdziwe. Można stwierdzić, że tautologie określają w jaki sposób wnioski wynikają z przesłanek opierając się wyłącznie na strukturze argumentów, niezależnie od ich rodzaju i treści.

Przykładami tautologii są:

- $p \vee (\sim p)$ - prawo wyłączonego środka
- $\sim(p \wedge (\sim p))$ - prawo sprzeczności
- $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$ - prawo podwójnej negacji
- prawo odrywania (modus ponens): $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
- modus tollens: $((p \Rightarrow q) \wedge (\sim q)) \Rightarrow \sim p$
- prawo redukcji do absurdu: $(p \Rightarrow (\sim p)) \Rightarrow \sim p$
- prawa de Morgana:
 - $(\sim(p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$
 - $(\sim(p \vee q)) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$
- prawo negacji implikacji: $(\sim(p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p \wedge (\sim q))$

Jeżeli w powyższym rachunku zdań wprowadzimy sobie zmienne tj. stworzymy formuły zdaniowe, które mogą oznaczać różne zdania w zależności od interpretacji zmiennych zdaniowych wchodzących w ich skład otrzymamy **funkcje zdaniowe**.

Funkcja zdaniowa staje się zdaniem logicznym, jeśli w miejsce zmiennych podstawimy jakieś konkrety. Zbiór wszystkich konkretów, które możemy podstawić w miejsce zmiennych do funkcji zdaniowej, nazywamy dziedziną funkcji zdaniowej.

W **rachunku kwantyfikatorów** przy pomocy symboli oznaczających funkcje zdaniowe, symbolu równości $=$, kwantyfikatorów, spójników logicznych, zmiennych i nawiasów tworzymy wyrażenia oznaczające nowe funkcje zdaniowe lub zdania (w zależności od tego, czy wszystkie zmienne w tych wyrażeniach są związane, czy nie). Wyrażenia takie nazywamy **formułami rachunku kwantyfikatorów**, lub krótko formułami. Formuły najczęściej oznaczamy małymi literami pochodzącymi z alfabetu greckiego.

Wyróżniamy następujące **kwantyfikatory**:

- Kwantyfikator szczegółowy (zwany też małym lub egzystencjalnym) oznaczamy symbolem $\exists x$, i czytamy: istnieje takie x , dla którego dane stwierdzenie jest prawdziwe ($\exists x \in X$ – czytamy: istnieje takie x ze zbioru X dla którego dane stwierdzenie jest prawdziwe).
- Kwantyfikator ogólny (zwany też dużym lub uniwersalnym) oznaczamy symbolem $\forall x$, i czytamy: dane stwierdzenie jest prawdziwe dla każdego x ($\forall x \in X$ – czytamy: dane stwierdzenie jest prawdziwe dla każdego x ze zbioru X).

Formułę domkniętą nazywamy **tautologią** (rachunku kwantyfikatorów), gdy jest zdaniem prawdziwym przy dowolnym rozumieniu występujących w niej symboli funkcji zdaniowych.

Mówimy, że dwie **formuły** domknięte α i β są **równoważne**, gdy formuła $\alpha \Leftrightarrow \beta$ jest tautologią

Dwie **funkcje zdaniowe** $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ dla $x \in X$ są **równoważne** wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie $\forall x \in X (\alpha(x) \Leftrightarrow \beta(x))$ jest prawdziwe.

Prawa de Morgana rachunku kwantyfikatorów:

- $\sim [\forall x \in X \alpha(x)] \Leftrightarrow \exists x \in X \sim \alpha(x)$
- $\sim [\exists x \in X \alpha(x)] \Leftrightarrow \forall x \in X \sim \alpha(x)$.

Krótko o zbiorach

Podstawowe działania na zbiorach

- Suma zbiorów $A \cup B$, $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.
- Iloczyn zbiorów $A \cap B$, $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.
- Różnica zbiorów A/B , $x \in A/B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$.
- Różnica symetryczna zbiorów $A \div B$, $x \in A \div B \Leftrightarrow x \in A/B \vee x \in B/A$.
- Iloczyn kartezjański zbiorów $A \times B = \{(a,b); a \in A, b \in B\}$.

Zbiory liczbowe

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ - zbiór liczb naturalnych,

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ - zbiór liczb całkowitych,

$\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ - zbiór liczb całkowitych bez zera,

$\mathbb{Z}_+ = \{p \in \mathbb{Z}, p > 0\}$ - zbiór liczb całkowitych dodatnich,

$\mathbb{Z}_- = \{p \in \mathbb{Z}, p < 0\}$ - zbiór liczb całkowitych ujemnych,

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} ; m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$ - zbiór liczb wymiennych,

$\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ - zbiór liczb wymiennych bez zera,

$\mathbb{Q}_+ = \{p \in \mathbb{Q}, p > 0\}$ - zbiór liczb wymiennych dodatnich,

$\mathbb{Q}_- = \{p \in \mathbb{Q}, p < 0\}$ - zbiór liczb wymiennych ujemnych,

$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych,

$\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ - zbiór liczb rzeczywistych bez zera,

$\mathbb{R}_+ = \{p \in \mathbb{R}, p > 0\}$ - zbiór liczb rzeczywistych dodatnich,

$\mathbb{O} = \{p \in \mathbb{R}, p \geq 0\}$ - zbiór liczb rzeczywistych dodatnich,

$\mathbb{R}_- = \{p \in \mathbb{R}, p < 0\}$ - zbiór liczb rzeczywistych ujemnych,

$\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych.

LICZBY ZESPOLONE

POSTAĆ ALGEBRAICZNA.

Liczby zespolone to liczby będące rozszerzeniem zbioru liczb rzeczywistych o rozwiązania równań kwadratowych nierozwiązywalnych w zbiorze liczb rzeczywistych (pierwiastki parzystych stopni z liczb ujemnych).

Przyjmuje się na początek tzw. jednostkę urojoną oznaczaną symbolem i . i jest jednym z pierwiastków kwadratowych -1 (drugi to $-i$). Często zapisuje się też: $i = \sqrt{-1}$.

Przy pomocy jednostki urojonej każdą liczbę zespoloną z można zapisać w **postaci algebraicznej** w następujący sposób:

$$z = a + bi,$$

gdzie a, b są pewnymi liczbami rzeczywistymi.

DEFINICJA. 1.1 Dla liczby $z = a + bi$ w postaci algebraicznej definiuje się jej **część rzeczywistą** jako $\operatorname{Re} z = a$ i **część urojoną** jako $\operatorname{Im} z = b$.

DEFINICJA. 1.2 Liczbę postaci $\bar{z} = a - bi$ nazywamy **sprzężeniem** liczby $z = a + bi$.

DEFINICJA. 1.3 Liczby postaci $z = 0 + bi$ nazywa się **liczbami czysto urojonymi**.

Liczby postaci $z = a + 0i$ są izomorficzne ze zbiorem liczb rzeczywistych.

DEFINICJA. 1.4 Dwie liczby zespolone **są równe** wtedy i tylko wtedy, gdy ich części rzeczywiste są równe i części urojone są równe.

Tj. jeżeli

$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad \text{ i } \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$\text{to} \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2).$$

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie liczb zespolonych w postaci algebraicznej wykonuje się tak samo jak dodawanie, odejmowanie i mnożenie wyrażeń algebraicznych, przy czym należy pamiętać, że $i^2 = -1$.

Aby podzielić przez siebie dwie liczby zespolone, wystarczy pomnożyć dzielną i dzielnik przez liczbę sprzężoną do dzielnika (analogicznie do usuwania niewymierności z mianownika w wyrażeniach algebraicznych) tj. dla $z_2 \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}.$$

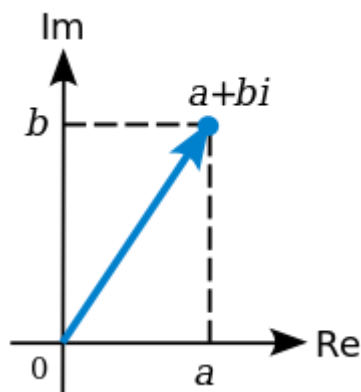
Potęgowanie za pomocą mnożenia liczb zespolonych w postaci algebraicznej prowadzi do obliczenia wartości wyrażenia $(a + bi)^n$ dla danego wykładnika n przy warunku $i^2 = -1$. Zwykle jest to dość pracochłonne zadanie.

PŁASZCZYZNA ZESPOLONA

Jeżeli na płaszczyźnie przyjąć prostokątny układ współrzędnych następująco: bierzemy dwie osie do siebie wzajemnie prostopadłe. Jako oś odciętych bierzemy oś liczb izomorficznych ze zbiorem liczb rzeczywistych, jako oś rzędnych bierzemy oś liczb czysto urojonych. Wtedy liczby zespolone mogą być przedstawione jako współrzędne wektora zaczepionego w początku układu współrzędnych na tej płaszczyźnie zwanej *płaszczyzną zespoloną*. Tj.

$$z = a + bi \sim (a, b)$$

i odwrotnie.



W ten sposób liczbom zespolonym można przyporządkować wzajemnie jednoznacznie wektory na płaszczyźnie, podobnie jak utożsamia się wektory na prostej z liczbami rzeczywistymi (można utożsamiać same punkty, bo wektory zaczepia się w początku układu współrzędnych).

MODUŁ LICZBY ZESPOLONEJ

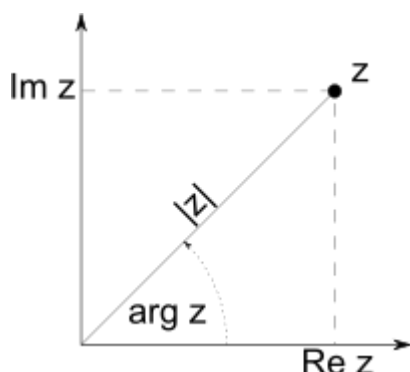
DEFINICJA. 1.5 **Modułem** liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy liczbę:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Moduł liczby zespolonej ma analogiczne własności jak wartość bezwzględna liczby rzeczywistej.

ARGUMENT LICZBY ZESPOLONEJ

DEFINICJA. 1.6 **Argumentem** liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy kąt, który wektor $\vec{z}$ tworzy z prostą $\text{Re } z$, oznaczmy go przez $\arg z$. Przyjmuje się, że $\arg 0 = 0$.



Dla liczby $z \neq 0$, $z = a + bi$. mamy: $\sin(\arg z) = \frac{b}{|z|}$; $\cos(\arg z) = \frac{a}{|z|}$.

Jak widać każda liczba zespolona ma nieskończenie wiele argumentów. Dlatego zazwyczaj wyróżnia się jeden z nich – ten należący do przedziału $(0, 2\pi)$ i nazywa **argumentem głównym** oraz oznacza symbolem $\text{Arg } z$.

Dla liczb rzeczywistych argument główny jest równy zero dla liczb dodatnich oraz π dla ujemnych.

TWIERDZENIE 1.1 Niech $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ będą wierzchołkami trójkąta, zaś $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ kątami wewnętrznymi tego trójkąta leżącymi w wierzchołkach z_1, z_2, z_3 , odpowiednio. Wtedy $\alpha_1 = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$, $\alpha_2 = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$, $\alpha_3 = \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$.

POSTAĆ TRYGONOMETRYCZNA

Oznaczmy teraz $argz$ przez α . Liczba zespolona może być wyrażona przez jej moduł oraz argument w sposób następujący:

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

DEFINICJA. 1.7 Powyższą postać liczby zespolonej nazywa się **postacią trygonometryczną**.

Liczby zespolone w postaci trygonometrycznej są równe, gdy ich moduły i argumenty główne są równe (równoważnie: gdy ich argumenty różnią się o całkowitą wielokrotność kąta pełnego).

Mnożenie i dzielenie liczb w postaci trygonometrycznej.

Niech $z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$ wtedy iloczyn i iloraz wyrażają się wzorami:

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)),$$

przy założeniu $z_2 \neq 0$.

Wzór de Moivre'a – potęgowanie liczb w postaci trygonometrycznej.

Niech $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Jeżeli n razy zastosujemy wzór na mnożenie otrzymamy wzór na potęgowanie w następującej postaci:

$$z^n = |z|^n (\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Pierwiastkowanie liczb w postaci trygonometrycznej.

W przypadku liczb zespolonych przez symbol $\sqrt[n]{z}$ rozumiemy zbiór złożony z n elementów $z_i, i = 0, 1, \dots, n-1$, z których każdy spełnia warunek $z_i^n = z$. Przyjmujemy tak ponieważ każda liczba zespolona $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ różna od zera ma dokładnie n różnych pierwiastków n -tego stopnia, które wyrażają się wzorem:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1.$$

TWIERDZENIE.1.2 Zasadnicze twierdzenie algebry. Każdy wielomian zespolony stopnia dodatniego n ma w ciele liczb zespolonych dokładnie n pierwiastków, licząc z krotnościami. Innymi słowy, ciało liczb zespolonych jest algebraicznie domknięte.

TWIERDZENIE.1.3 Stopień niezerowego wielomianu zespolonego jest równy sumie krotności jego zespolonych pierwiastków. Jest to równoważne temu, iż każdy wielomian zespolony stopnia $n > 0$ można przedstawić w postaci iloczynu

$$a (z - z_1) (z - z_2) \dots (z - z_n) \quad \text{dla pewnych } a, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$$

POSTAĆ WYKŁADNICZA

Niech $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Wtedy naszą liczbę zespoloną możemy zapisać w postaci wykładniczej:

$$z = |z|e^{i\alpha}.$$

Literatura:

1. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas: Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory. Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2004.
2. W. Krywicki, L. Włodarski : Analiza matematyczna w zadaniach cz.1, PWN, Warszawa.
3. W. Wiśniewski: Liczby i geometria. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne. Warszawa 1996.