

Załącznik nr 3

AUTOREFERAT

RAFAŁ RAK

Rzeszów, 13 września 2023

Spis treści

1	Dane Osobowe	3
1.1	Imię i nazwisko	3
1.2	Posiadane dyplomy, stopnie naukowe – z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej	3
1.3	Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych	3
2	Omówienie osiągnięć	4
2.1	Tytuł osiągnięcia naukowego	4
2.2	Publikacje naukowe stanowiące podstawę osiągnięcia naukowego . .	4
2.3	Omówienie celu naukowego i osiągniętych wyników	5
2.3.1	Wprowadzenie	5
2.3.2	Szczegółowe omówienie prac	9
2.3.3	Podsumowanie	53
3	Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze	56
3.1	Wykaz innych prac naukowych (nie wchodzących w skład osiągnięcia wymienionego w punkcie 2) opublikowanych w czasopismach z bazy Journal Citation Reports (JCR)	56
3.1.1	Przed uzyskaniem stopnia doktora	56
3.1.2	Po uzyskaniu stopnia doktora	57
3.2	Publikacje w czasopismach spoza bazy JCR	57
3.3	Podstawowe informacje bibliometryczne	58
3.3.1	Wg Web of Science	58
3.3.2	Wg Scopus	58
3.3.3	Wg Google Scholar	58
3.4	Kierowanie międzynarodowymi lub krajowymi projektami badawczymi lub udział w takich projektach	58
3.5	Aktywny udział w międzynarodowych i krajowych konferencjach naukowych	58
3.6	Udział w komitetach organizacyjnych międzynarodowych i krajowych konferencji naukowych	60
3.7	Otrzymane nagrody i wyróżnienia	60
3.8	Udział w komitetach redakcyjnych i radach naukowych czasopism .	60
3.9	Członkostwo w międzynarodowych lub krajowych organizacjach i towarzystwach naukowych	61
3.10	Staże w zagranicznych lub krajowych ośrodkach naukowych lub akademickich	61
3.11	Recenzowanie publikacji naukowych w czasopismach międzynarodowych i krajowych	62

4	Działalność dydaktyczna i popularyzatorska	62
4.1	Osiągnięcia dydaktyczne w zakresie popularyzacji nauki	62
4.2	Opieka naukowa nad doktorantami	62
4.3	Opieka nad studentami w charakterze promotora pracy inżynierskiej/magisterskiej	63
4.4	Pełnione funkcje	63
4.5	Działalność dydaktyczna	64

1 Dane Osobowe

1.1 Imię i nazwisko

Rafał Rak

1.2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe – z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej

2008 Dyplom doktora nauk fizycznych, Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytet Rzeszowski, Rzeszów. Tytuł rozprawy doktorskiej: „Ilościowe charakterystyki fluktuacji i korelacji na polskim rynku akcji”, promotor prof. dr hab. Stanisław Drożdż. Rozprawa oceniona jako wyróżniająca się i nagrodzona przez Rektora Uniwersytetu Rzeszowskiego.

2003 Dyplom magistra fizyki, Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytet Rzeszowski, Rzeszów.

1.3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

2013.10-do dziś adiunkt w Instytucie Nauk Fizycznych; kierownik Pracowni Dynamiki Procesów Ekonomicznych i Społecznych oraz Pracowni Teorii Sieci Złożonych w Laboratorium Prognoz i Badań Systemowych, Centrum Innowacji i Transferu Wiedzy Techniczno-Przyrodniczej (ChTWTP), Kolegium Nauk Przyrodniczych, Uniwersytet Rzeszowski.

2008.10-2013.09 adiunkt w Zakładzie Dynamiki Materii (Zespół Systemów Złożonych); Instytut Fizyki, Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytet Rzeszowski.

2003.10-2008.09 asystent w Zakładzie Dynamiki Materii (Zespół Systemów Złożonych); Instytut Fizyki, Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytet Rzeszowski.

2 Omówienie osiągnięć

2.1 Tytuł osiągnięcia naukowego

Jako osiągnięcie naukowe będące podstawą ubiegania się o nadanie stopnia doktora habilitowanego, wynikające z art. 221 ust. 10 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 zm.) wskazuję cykl publikacji powiązanych tematycznie zatytułowany:

Ilościowe aspekty wybranych układów złożonych

2.2 Publikacje naukowe stanowiące podstawę osiągnięcia naukowego

- [K1] S. Drożdż, J. Kwapień, P. Oświęcimka, R. Rak, *Quantitative features of multifractal subtleties in time series*, Europhysics Letters (EPL), 88, 60003 (2009).
- [K2] R. Rak, D. Grech, *Quantitative approach to multifractality induced by correlations and broad distribution of data*, Physica A, 508, 48 (2018).
- [K3] R. Rak, S. Drożdż, J. Kwapień, P. Oświęcimka, *Detrended cross-correlations between returns, volatility, trading activity, and volume traded for the stock market companies*, Europhysics Letters (EPL), 112, 48001 (2015).
- [K4] R. Rak, S. Drożdż, J. Kwapień, P. Oświęcimka, *Stock returns versus trading volume: is the correspondence more general?*, Acta Physica Polonica B, 44, 2035 (2013).
- [K5] S. Drożdż, J. Kwapień, P. Oświęcimka, R. Rak, *The foreign exchange market: return distributions, multifractality, anomalous multifractality and the Epps effect*, New Journal of Physics, 12, 105003 (2010).
- [K6] R. Rak, P. Zięba, *Multifractal flexibly detrended fluctuation analysis*, Acta Physica Polonica B, 46, 1925 (2015).
- [K7] R. Rak, S. Bwanakare, *Quantitative Characteristics of Correlations of Meteorological Data*, Acta Physica Polonica A, 129, 922 (2016).
- [K8] R. Rak, J. Kwapień, P. Oświęcimka, P. Zięba, S. Drożdż, *Universal features of mountain ridge networks on Earth*, Journal of Complex Networks, 8(1), cnz17, (2020).

[K9] R.Rak, E.Rak, *The Fractional Preferential Attachment Scale-Free Network Model*, Entropy, 22(5), 509 (2020).

[K10] R. Rak, E. Rak, *Multifractality of complex networks is also due to geometry: a Geometric SandBox algorithm*, Entropy, 25(9), 1324 (2023).

2.3 Omówienie celu naukowego i osiągniętych wyników

2.3.1 Wprowadzenie

Złożoność to pojęcie, z którym obecnie spotykamy się nie tylko na gruncie nauk fizycznych, ale także w chemii, matematyce, biologii, medycynie, filozofii, elektronice czy w naukach społecznych i ekonomicznych. I choć często używane, to ciągle trudne do jednoznacznego sprecyzowania. Najogólniej rzecz ujmując złożoność oznacza coś skomplikowanego i/lub trudnego do zrozumienia. Co ciekawe struktury złożone (np. turbulentne lub chaotyczne) mogą generować już proste nieliniowe układy deterministyczne. Zjawisko złożoności jest niezwykle różnorodne a jedną z charakterystycznych jego cech jest wszechobecność występowania, począwszy od skal nanoświata do skal międzygalaktycznych. Typowe układy złożone to układy dynamiczne, które opisuje się w przestrzeni wszystkich możliwych stanów układu w dowolnej chwili czasu (przestrzeni fazowej). Integralną własnością układów złożonych jest ich emergentność lub, w języku fizyki statystycznej, nieekstensywność, gdzie wiedza na temat stanu jego elementów składowych nie determinuje wiedzy na temat stanu całego układu. Przykładem ilustrującym tą własność może być np. jądro atomowe, dla którego znajomość praw rządzących jego elementami składowymi (cząstkami elementarnymi) nie przekłada się bezpośrednio na znajomość praw, które nim rządzą. Innym przykładem mogą być zjawiska pogodowe, gdzie globalne prognozy nie są w stanie precyzyjnie przewidzieć lokalnych wskazań meteorologicznych i odwrotnie.

Również umysł ludzki, jako pojedyncza jednostka, uważany jest za układ złożony. Trudno sobie nawet wyobrazić jak bardzo złożony jest układ wielu oddziałujących ze sobą umysłów. Efektem ich wzajemnego oddziaływania, a zarazem przykładem systemu złożonego, są rynki finansowe. Każdego dnia miliony osób na całym świecie zlecają miliardy zamówień na kupo lub sprzedaż aktywów finansowych (np. akcje, obligacje, derywatywy, waluty) zgodnie z własnymi strategiami inwestycyjnymi, które są reakcją na ogromną ilość napływających informacji. W konsekwencji decyzje podejmowane przez inwestorów powodują, iż zachowanie rynków finansowych określa się jako jedno z bardziej złożonych. Jedną z koncepcji, która wskazuje na wyjątkowo obiecujący kierunek mogący uchwycić zasadnicze cechy złożoności jest koncepcja multifraktalności. Fraktale są obiektami, których definicja nie jest do końca ścisła. Pionierskie prace bezpośrednio związane z pojęciem

fraktali (wtedy jeszcze tak nie nazywane) zostały zredagowane przez matematyków Gastona Julii i Pierre’a Fatou w drugiej dekadzie XX wieku. Kilkadziesiąt lat później Benoit Mandelbrot rozszerzył ich teorie a obiektom geometrycznym, które otrzymał nadał nazwę *fraktale* [163]. Jako formy nietrywialnej geometrii nieukłidesowej, fraktale są często intuicyjnie uważane za obiekty złożone a wymiar fraktalny jest często postrzegany jako miara złożoności. Sama obecność struktur fraktalnych w naturze jest zwykle uważana za przejaw złożoności. Generatorami tego typu struktur są m.in. zjawiska krytyczne, multiplikatywne procesy kaskadowe czy wzajemne sprzężenia dwóch lub więcej różnych procesów. Procesy te czasami działają przeciwnie niż np. w przypadku zjawiska agregacji z ograniczoną dyfuzją. Można dostrzec je również np. w formowaniu krajobrazu, w którym erozja dyfuzyjna skał stymulowana jest przez liczne nieliniowe procesy o charakterze geologicznym i/lub atmosferycznym. Jeśli zamiast obiektu geometrycznego rozważamy szereg czasowy, konieczne jest uogólnienie pojęcia fraktala o naturze deterministycznej (matematycznego) na pojęcie statystyczne (przybliżone). W tym przypadku nie jest wymagana idealna niezmiennność kształtu sygnału podczas transformacji afinicznej na rzecz niezmienności jego właściwości statystycznych. Oczekuje się, że krótki fragment sygnału po właściwym przeskalowaniu ma takie same właściwości statystyczne jak cały sygnał. Konwolucję pojedynczych fraktali nazywany multifraktalem, który z założenia jest obiektem bardziej złożonym niż fraktal. Multifraktale to struktury o niejednorodnym rozkładzie miary, których opis za pomocą jednego wymiaru fraktalnego jest dalece niekompletny. Dlatego konieczne jest opisywanie ich za pomocą nieskończonej rodziny wymiarów fraktalnych, z których każdy opisuje tylko jeden podzbiór fraktalny obejmujący określony typ osobliwości. Koncepcja multifraktalności, poprzez badanie m.in. widm multifraktalnych danego systemu, oferuje zwartą formę do kwantyfikowania hierarchii skał i specyfiki jego złożonej struktury. Dotyczy to w szczególności dynamicznych aspektów złożoności, których empiryka jest zazwyczaj dostępna na poziomie szeregów czasowych zawierających informacje o kolejnych stanach danego systemu.

Wszechobecność sygnatur multifraktalnych w złożonych zjawiskach naturalnych w ostatnich latach zaowocowało dużą aktywnością w niemal wszystkich obszarach działalności naukowej tj. w fizyce [2–4], biologii [5–7], chemii [8, 9], geofizyce [10, 11], hydrologii [12], fizyce atmosfery [13], językoznawstwie ilościowym [14, 15], naukach behawioralnych [16], muzyce [17, 18], fizjologii [19, 20], ludzkich zachowaniach [21–23], psychologii społecznej [24], ekologii [25] a nawet w sieciach grani górskich [praca K[8]]. Jednak z uwagi na aspekty praktyczne i wymierne korzyści z nimi związane, szczególną aktywność w kontekście multifraktalności zaobserwowano w obszarze ekonomicznym oraz finansowym [26–37]. Zaowocowało to m.in. opracowaniem modeli dynamiki finansowej opartych na multifraktalności, które pomagają w dokonywaniu prognoz [27, 38–42].

Jedną z cech charakteryzujących układy złożone są oddziaływania pomiędzy elementami, które go tworzą. Interesującą teorią, która z założenia uwzględnia ten fakt jest teoria sieci (grafów). Zaletą formalizmu sieciowego jest możliwość opisu zasadniczo różnych układów w tym samym języku tj. języku grafów, dzięki czemu można zidentyfikować wspólne cechy wielu układów złożonych, które wcześniej, z innych perspektyw, nie były dostrzegalne. Podstawą tego formalizmu jest pojęcie węzłów i krawędzi, które ostatecznie tworzą pewną, optymalizującą układ bazowy strukturę, czyli graf. Węzły są elementami strukturalnymi lub funkcjonalnymi opisywanego układu a krawędzie, które łączą węzły, stanowią fizyczne oddziaływania lub dowolnie inne związki międzywęzłowe.

Ze względu na ich użyteczność badanie sieci złożonych rozwinęło się w wielu dziedzinach, takich jak matematyka, fizyka, chemia, biologia, ekonomia, informatyka, filologia, socjologia czy geologia. Większość sieci rzeczywistych wykazuje ciekawe cechy topologiczne, a połączenia międzywęzłowe mają złożony charakter. Często badanie ich charakterystyk sprowadza się do analizy: assortatywności pomiędzy wierzchołkami, współczynnika grupowania, rozkładu stopni, wzajemności, centralności czy najkrótszych ścieżek. Są także przesłanki, że użytecznym i obiecującym narzędziem identyfikacji możliwej złożoności struktury sieci (a więc i układu, który reprezentuje) jest jej analiza (multi-) fraktalna. Badania sieciowe stały się ważnym i nieodzownym elementem procesu precyzyjnego opisu złożonych systemów do tego stopnia, że niektórzy uważają iż rozwój teorii sieci jest swego rodzaju panaceum do zrozumienia zasad i praw, które rządzą układami złożonymi [43].

Rdzeniem niniejszego autoreferatu jest cykl dziesięciu publikacji. W pracach [K1] i [K2] dyskutowane są ilościowe efekty wpływu na pozorną multifraktalność takich czynników jak: długozasięgowe korelacje nieliniowe, grube ogony rozkładów prawdopodobieństwa fluktuacji, (a)symetryczność rozkładów czy długość analizowanej serii czasowej. Obliczenia oparto zarówno na danych syntetycznych jak i rzeczywistych. Dane rzeczywiste to fluktuacje logarytmicznych stóp zwrotu pochodzące z polskiego, niemieckiego i amerykańskiego rynku giełdowego oraz z rynku walutowego FOREX. Generator sztucznych fluktuacji oparto na nieekstensywnej statystyce Tsallis'a. W ten sposób generowano dane, których rozkład prawdopodobieństwa, nazywany $\tilde{q}$ Gauss'ianem, był w pełni kontrolowany parametrem q w przedziale od reżimu Levy'ego do Gauss'owskiego.

W artykułach [K3] i [K4] analizowano korelacje krzyżowe pomiędzy wielkościami, które w pełni charakteryzują handel na giełdzie. Były to logarytmiczne stopy zwrotu, wolatylność(zmienność), liczba transakcji i wolumen obrotu. W pracy [K3] analizowano amerykański (31 spółek giełdowych wchodzących w skład indeksu DJIA) a w [K4] polski rynek akcji (największe spółki indeksu WIG20).

W artykule [K3] poprzez zastosowanie multifraktalnej analizy korelacji krzyżowych z zachowaniem znaku (MFCCA) pokazano, pomiędzy którymi wielkościami cha-

rakteryzującymi rynek istnieją najsilniejsze i najslabsze korelacje. Istnienie silnego fraktalnego sprzężenia między odpowiednimi wielkościami potwierdzono na poziomie ich złożonej relacji pomiędzy rozkładami prawdopodobieństwa [K4]. Ponadto, zbadano empiryczny wpływ cen na wolumen obrotu i stwierdzono, że wpływ ten można opisać w formie analitycznej. Wnioski z przeprowadzonych badań pozwoliły również stwierdzić czy z danej perspektywy polski rynek akcji jest podobny do rynków bardziej ustanowionych.

W artykule [K5] poruszono temat korelacji czasowych dla sześciu najbardziej popularnych na rynku par walutowych: USD/EUR, EUR/GBP, GBP/USD, JPY/GBP, GBP/CHF oraz CHF/JPY. Korelacje czasowe powodują, iż charakterystyki multifraktalne serii czasowych stóp zwrotu, wszystkich rozważanych tu kursów walutowych, mają różne stopnie symetrii spektrum osobliwości. Określono więc najbardziej symetryczne i niesymetryczne widmo par walutowych. Dla potrzeb szerszej analizy utworzono także serie czasowe związane z relacjami handlu po trójkacie i zbadano rozkłady ich fluktuacji w relacji do rozkładów fluktuacji walut tworzących dany trójkąt. Pokazano również, że charakterystyki multifraktalne fluktuacji (m.in. spektrum osobliwości) reszt handlu po trójkacie ujawniają specyficzny i anormalny charakter. Takie anomalne własności zostały dotychczas udokumentowane w literaturze w kontekście turbulencji i agregacji z ograniczoną dyfuzją. Analizując korelacje między różnymi kursami walut scharakteryzowano także nieefektywność rynku walutowego. Otrzymane wyniki porównano z wynikami dla rynku akcji.

W celu wyznaczenia charakterystyk multifraktalnych najczęściej stosuje się powszechnie już uznaną w literaturze metodę MF DFA. Jednak i ona nie jest doskonała. Dlatego w pracy [K6] zaproponowano dwie modyfikacje do tej metody. Zarówno na danych syntetycznych jak i rzeczywistych pokazano m.in. jak modyfikacje te wpływają na charakterystyki multifraktalne.

W artykułach [K1]-[K6] analizowano dane, które generowane są przez rynki finansowe. Intuicja podpowiada, że równie złożoną i ciekawą naturę powinny mieć np. dane meteorologiczne. Dlatego w pracy [K7] podjęto próbę zidentyfikowania sygnatur multifraktalnych dla danych numerycznych związanych z pogodą. Były to temperatura powietrza na wysokości 2 metrów ($T1$), temperatura przy gruncie ($T2$), prędkość wiatru (W) oraz wilgotność powietrza (H). W pierwszym etapie przeprowadzono obliczenia dla serii traktując je jako niezależne od siebie. Następnie zbadano ewentualne istnienie krzyżowych korelacji wieloskalowych dla 6 par: $W - H$, $T1 - T2$, $W - T2$, $H - T2$, $W - T$ oraz $H - T1$. Otrzymane wyniki zestawiono z wynikami uzyskanymi metodą stosowaną w obszarze ekonometrii.

W pracach [K8], [K9], [K10] zwrócono uwagę na aspekty sieciowe układów złożonych. Zidentyfikowano i przeanalizowano pod względem ilościowym sieć grani górskich dla 9 najwyższych pasm górskich Ziemi [K8]. W pracy [K9] zaproponowano model generujący sieci, który przy zadanym parametrze odzwierciedla podstawowe

cechy rzeczywistych sieci o charakterze bezskalowym. Praca K[10] poświęcona jest przede wszystkim multifrakalnemu aspektowi sieci. Zaproponowano w niej metodę indentyfikowania ewentualnej (multi-) fraktalności, która uwzględnia nie tylko topologiczne ale także typowo geometryczne własności analizowanych grafów.

2.3.2 Szczegółowe omówienie prac

[K1] S. Drożdż, J. Kwapień, P. Oświęcimka, R. Rak, *Quantitative features of multifractal subtleties in time series*, Europhysics Letters (EPL), 88, 60003 (2009).

Mój wkład w powstanie artykułu [K1] to: wykonanie części obliczeń, udział w analizie i interpretacji wyników, udział w tworzeniu koncepcji artykułu.

[K2] R. Rak, D. Grech, *Quantitative approach to multifractality induced by correlations and broad distribution of data*, Physica A, 508, 48 (2018).

Mój wkład w powstanie artykułu [K2] to: pozyskanie i przygotowanie danych numerycznych, przygotowanie warsztatu algorytmiczno – obliczeniowego i wykonanie obliczeń, udział w analizie i interpretacji wyników, udział w tworzeniu koncepcji i edycji artykułu.

Praktyczne efekty multifrakalności są obecnie intensywnie badane ponieważ nie wszystkie są jeszcze dokładnie znane. W wielu systemach, w tym w finansowych szeregach czasowych, zidentyfikowano nowe, interesujące cechy tego zjawiska [29,32,42,44–50]. Zwiększa to nadzieję na opracowanie bardziej efektywnych w praktyce zastosowań związanych m.in. z analizą ryzyka finansowego. Dlatego pytania dotyczące dokładności, przydatności i wiarygodności multifrakalnych analiz danych rzeczywistych są kluczowe dla właściwej interpretacji uzyskanych wyników. Od czasu publikacji Kantelhardta [51] wiemy, że obserwowane właściwości multifrakalne mogą pojawiać się nie tylko w wyniku istniejących długo-zasięgowych korelacji nieliniowych ale mogą być także efektem potęgowych i grubych ogonów rozkładów prawdopodobieństwa analizowanych fluktuacji. W rzeczywistości wzajemne oddziaływanie i konwolucja tych efektów prowadzi do obserwowanego widma multifrakalnego [52–55]. Wyzwaniem jest więc zbadanie i zinterpretowanie w jaki sposób te i ewentualnie inne składniki wpływają na obserwowane efekty multifrakalne. W szczególności zasadnym jest zaproponowanie jakiejś ogólnej metody i analitycznych lub półanalitycznych formuł, które mogłyby uwzględnić wzajemne oddziaływanie między prawdziwym multiscaleowaniem danych generowanych przez efekty nieliniowych korelacji a pozostałymi źródłami multifrakalności, które mogą generować wieloczynnikowe artefakty, zwane czasem fałszywą multifrakalnością. Efekty multifrakalne mogą być również wynikiem obecności w danych białego lub kolorowego szumu, krótkotrwałej pamięci lub okresowości czy klasteryzacji. Wpływ

efektu skończoności próbki i liniowych autokorelacji na multifraktalność szeregów czasowych został opisany w sposób ilościowy w serii artykułów [54–57]. Jednakże z praktycznego punktu widzenia najciekawszą jest ewentualna multifraktalność generowana przez efekty nieliniowe, grube ogony i symetryczność czy asymetryczność rozkładów - efekty te odzwierciedlają w pewnym sensie strukturę genetyczną złożonych połączeń wewnętrznych oraz przepływ informacji wewnątrz badanego układu.

W pracach [K1] i [K2] dokonano ilościowej analizy efektów multifraktalnych determinowanych różnymi grubościami ogonów rozkładów, symetrią/asymetrią rozkładów czy długością próbek analizowanych szeregów czasowych. Zarówno w pracy [K1] i [K2] do generowania syntetycznych, pozbawionych korelacji liniowych i nieliniowych serii czasowych wykorzystano formalizm oparty na nieekstensywnej mechanice Tsallis’a [58–63]. Rozkłady prawdopodobieństwa oparte na statystyce Tsallis’a (tzw. $\tilde{q}$ Gaussiany) pozwalają na generowanie całej klasy rozkładów zależnych od parametru $\tilde{q}$: dla $1 \leq \tilde{q} < 5/3$ atraktorem jest obszar Gauss’a a dla $5/3 \leq \tilde{q} \leq 2$ atraktor Levy’ego. W oparciu o analityczną postać rozkładu gęstości prawdopodobieństwa

$$p(x) \sim e_{\tilde{q}}^{-\mathcal{B}_{\tilde{q}}x^2} = 1/[1 + (\tilde{q} - 1)\mathcal{B}_{\tilde{q}}x^2]^{1/(\tilde{q}-1)}$$

w pracy [64], której współautorem jest habilitant, zaproponowano ich skumulowaną postać:

$$P_{\pm}(x) = \mathcal{N}_{\tilde{q}} \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}(3 - \tilde{q})\right) \beta}{2 \Gamma(\beta) \sqrt{\frac{\mathcal{B}_{\tilde{q}}}{\beta}}} \pm (x - \bar{\mu}_{\tilde{q}}) {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; \delta) \right) \quad (1)$$

gdzie, ‘+’ i ‘-’ to odpowiednio prawa i lewa część rozkładu, a

$$\mathcal{N}_{\tilde{q}} = \begin{cases} \frac{\Gamma\left[\frac{5-3\tilde{q}}{2-2\tilde{q}}\right]}{\Gamma\left[\frac{2-\tilde{q}}{1-\tilde{q}}\right]} \sqrt{\frac{1-\tilde{q}}{\pi}} \mathcal{B}_{\tilde{q}} & dla \quad \tilde{q} < 1 \\ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\tilde{q}-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\tilde{q}}{2(\tilde{q}-1)}\right) \sqrt{\frac{\pi}{(\tilde{q}-1)\mathcal{B}_{\tilde{q}}}}} & dla \quad 1 < \tilde{q} < 3 \end{cases},$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{q}} = \int x \frac{[p(x)]^{\tilde{q}}}{\int [p(x)]^{\tilde{q}} dx} dx \equiv \langle x \rangle_{\tilde{q}},$$

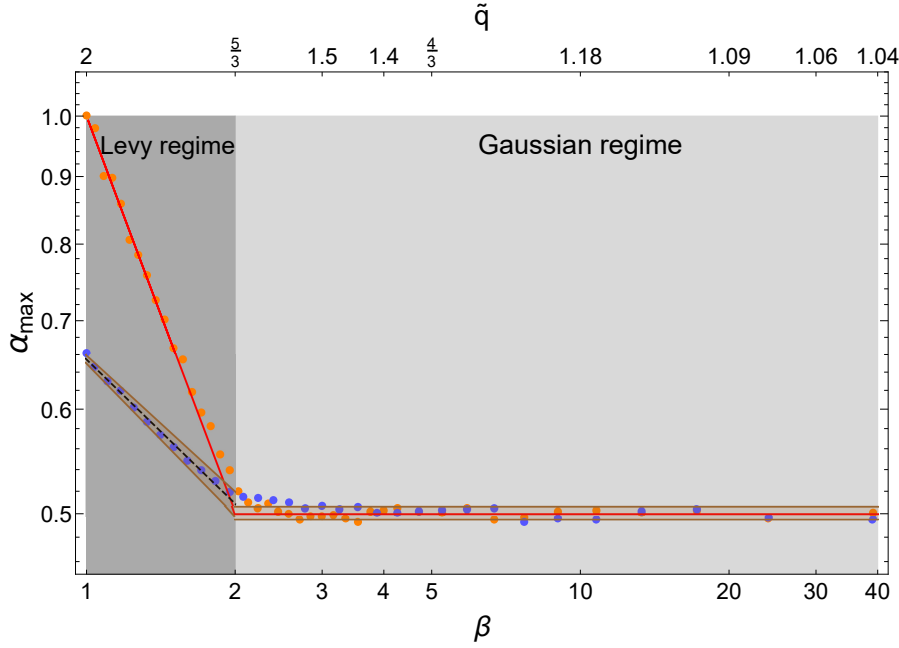
$$\mathcal{B}_{\tilde{q}} = \left[(3 - 1) \bar{\sigma}_{\tilde{q}}^2 \right]^{-1},$$

$\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{\tilde{q}-1}$, $\gamma = \frac{3}{2}$, $\delta = -\mathcal{B}_{\tilde{q}}(\tilde{q} - 1)(\bar{\mu}_{\tilde{q}} - x)^2$ i ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; \delta)$ jest hypergeometryczną funkcją Gauss’a. Ten typ klasy rozkładów jest asymptotycznie (dla dostatecznie dużych x) zgodny z prawem potęgowym

$$P(x) \sim x^{\frac{2}{1-\tilde{q}}+1} \sim x^{-\beta}. \quad (2)$$

Do badania multifrakalnych własności szeregów czasowych, zarówno w pracy [K1] jak i [K2], posłużono się powszechnie znaną i uznaną metodą Multifraktalnej Analizy Zdetrendowanych Fluktuacji (Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA)) [51]. Dodatkowo w pracy [K1] wyniki otrzymane metodą MFDFA zestawiono z wynikami otrzymanymi w oparciu o metodę Modułu Maksimów Transformaty Falkowej (Wavelet Transform Modulus Maxima, (WTMM)) [65]. Wady i zalety obu metod przedstawiono w pracy [66]. Dzięki ogólnym rozważaniom przeprowadzonym dotychczas w literaturze, wzbogaconym o nowe ilościowe wyniki w pracach [K1] i [K2], można jednoznacznie wskazać trzy podstawowe składniki mające wpływ na multifrakalny charakter danych. Są to: długość serii danych i liniowe korelacje (Δh_{FSE}), grube ogony rozkładów (Δh_{FT}) i nieliniowe korelacje czasowe (Δh_{NL}). W pracy [K1] badano wyłącznie rozkłady symetryczne. Z uwagi na to, iż w naturze często obserwujemy rozkłady niesymetryczne w pracy [K2] przebadano tego typu rozkłady w kontekście ich ewentualnych własności multifrakalnych. W celu zminimalizowania efektu wpływu długości próbki na własności multifraktalne generowano serie czasowe o długości 10^{10} . Założono, że w każdym przypadku dodatnie i ujemne fluktuacje (prawa i lewa strona rozkładu), co do wartości bezwzględnej, spełniają odpowiednio rozkład normalny (Gaussa) oraz rozkład $\tilde{q}$ Gauss'a (Eq.1) z odpowiednimi parametrami $\tilde{q}$. W ten sposób otrzymywano skrajnie niesymetryczne rozkłady. W analizie skoncentrowano się na parametrze $\Delta\alpha = \alpha_{max} - \alpha_{min}$, który jest jedną z miar poziomu multifraktalności badanej serii. W uwagi na to iż rozpatrywano rozkłady Levy-stabilne to $\Delta\alpha = \alpha_{max}$. Wyniki przedstawione w pracach [K1] i [K2] pokazują, że w przedziale Gauss'owskim efekt (a)symetrii rozkładu prawdopodobieństwa nie wpływa znacząco na właściwości multifraktalne ($\alpha_{max} \sim 0.5$). Wyraźne różnice są widoczne w obszarze Levy'ego (Rys.1).

Otrzymane wyniki wskazują na znacznie wolniejszy wzrost $\alpha_{max} \sim \beta^{-\gamma}$ dla rozkładów asymetrycznych – wartość $\gamma = 0.37$, podczas gdy dla rozkładów symetrycznych (zgodnie z założeniami teoretycznymi) $\gamma = 1$. Mniejsza wartość wykładnika γ wskazuje, że rozkład asymetryczny znacząco zmniejsza multifrakalny charakter analizowanych danych. Kiedy β maleje, a więc gdy ogon rozkładu staje się grubszy, przesunięcie widma multifraktalnego $f(\alpha)$ w prawo jest wolniejsze niż w przypadku symetrycznym. Jeśli chodzi o analizę spektrum multifraktalnego w bardziej globalnym sensie, wykazaliśmy, że fałszywe efekty multifraktalne dla tego rodzaju rozkładów mogą być dobrze opisane ilościowo przez prawo potęgowe $\Delta h_{FT} = C(\beta)q^\mu$ z parametrem deformacji multifraktalnej q i parametrem grubości ogona β . Relacja ta jest dobrze spełniona w zakresie $-5 \leq q \leq 5$ często używanym przez wielu autorów badających zjawiska multifraktalne w empirycznych szeregach czasowych. Zauważono również, że efekt fałszywej multifraktalności spowodowanej przez grube ogony rozkładów wydaje się nasycać na poziomie $q \sim 10 - 15$. Zi-



Rysunek 1: Prawa krawędź fałszywej multifraktalności α_{max} . Wyniki przedstawiono w skali logarytmiczno-liniowej w funkcji parametru $\tilde{q}$ oraz β dla próbek o długości $M = 10^{10}$ dla rozkładów symetrycznych (symbole pomarańczowe) i asymetrycznych (symbole niebieskie). Czerwona linia ciągła i czarna linia przerywana opisują wyniki teoretyczne odpowiednio dla rozkładów symetrycznych i asymetrycznych w obszarze atraktora Levy’ego i Gaussa. Odcień brązu wokół niebieskich symboli wskazuje zakres dokładności dopasowania przy poziomie ufności 95%. Ciemnoszary i jasnoszary obszar przedstawiają odpowiednio obszar Levy’ego i Gaussa.

dentyfikowane obserwacje mogą posłużyć jako narzędzie do szacowania wszystkich ”fałszywych” multifraktalnych sygnałów pojawiających się w danych o charakterze monofraktalnym.

Kolejnym, ważnym zagadnieniem poruszonym w artykułach [K1] i [K2] była analiza danych rzeczywistych. W pracy [K1] analizowane były fluktuacje logarytmicznych stóp zwrotu niemieckiego indeksu giełdowego DAX - skala czasowa $\Delta t = 15\text{sec}$. W pracy [K2] analizowano logarytmiczne stopy zwrotu amerykańskiego (DJIA) oraz polskiego indeksu giełdowego (WIG20). Indeks DJIA, dla potrzeb niniejszego artykułu, utworzono z danych dla 30 spółek: AA, AIG, AXP, BA, BAC, CAT, CSCO, CVX, DD, DIS, HD, HPQ, IBM, INTC, JNJ, JPM, KFT, KO, MCD, MMM, MRK, MSFT, PFE, PG, T, TRV, UTX, VZ, WMT i XOM. Dane analizowano na 4 różnych skalach czasowych $\Delta t = \{30\text{sec}, 60\text{sec}, 5\text{min}, 10\text{min}\}$. Analogicznej analizie poddano również 5min stopy zwrotu dla trzech walut rynku FOREX. Były to: EUR/USD, GBP/USD oraz RUB/USD. Głównym wnioskiem

jaki można wyciągnąć z analizy danych rzeczywistych jest to, że efekt grubych ogonów rozkładu prawdopodobieństwa wydaje się mieć znacznie większy wpływ na pozorną multifraktalność niż efekt skończonej długości danych czy efekt wywołany przez liniowe korelacje związane z serią. Okazało się, że prawdziwa multifraktalność danych empirycznych Δh_{NL} stanowi ok. 50% poziomu Δh . Pozorna multifraktalność jest szczególnie wyraźna w przypadku krótszych skal czasowych Δt , ponieważ wtedy ogony rozkładów są grubsze. Efekt ten jest szczególnie widoczny dla rozważanych tutaj walut (EUR/USD, GBP/USD, RUB/USD) oraz dla indeksu DJIA dla skal $\Delta t = 30\text{sec}$ i 60sec . Co ciekawe, silniejsze efekty nieliniowe są bardziej widoczne dla indeksu WIG20, szczególnie dla dłuższych skal czasowych tj. $\Delta t = 5\text{min}$ i 10min . Może to być spowodowane tym, że polski rynek akcji jest znacznie mniejszy i młodszy od amerykańskiego a przez to dokonywane jest na nim znacznie mniej transakcji w danej jednostce czasu - innymi słowy, czas transakcji wydaje się być relatywnie wolniejszy.

Biorąc pod uwagę wyniki otrzymane w pracach [K1] i [K2] należy podkreślić, że formułując wnioski i interpretacje na podstawie analizy multifraktalnej należy być ostrożnym, bowiem własności multifraktalne ściśle zależą od charakteru analizowanego systemu. Natomiast z praktycznego punktu widzenia, efekty, które opisaliśmy ilościowo, mogą mieć zastosowanie w modelowaniu i prognozowaniu zachowań systemów finansowych.

[K3] R.Rak, S.Drożdż, J.Kwapień, P.Oświęcimka, *Detrended cross-correlations between returns, volatility, trading activity, and volume traded for the stock market companies*, Europhysics Letters (EPL), 112, 48001 (2015).

Mój wkład w powstanie artykułu [K3] to: przygotowanie danych numerycznych, wykonanie części obliczeń numerycznych i teoretycznych, udział w analizie i interpretacji wyników, udział w tworzeniu koncepcji i redagowaniu artykułu.

[K4] R.Rak, S.Drożdż, J.Kwapień, P.Oświęcimka, *Stock returns versus trading volume: is the correspondence more general?*, Acta Physica Polonica B, 44, 2035 (2013).

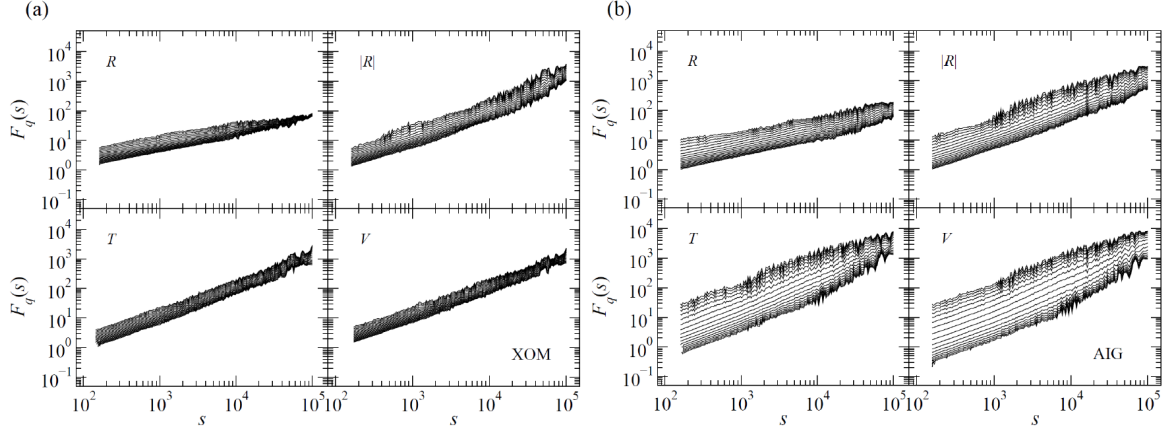
Mój wkład w powstanie artykułu [K4] to: pozyskanie i przygotowanie danych numerycznych, przygotowanie warsztatu algorytmiczno – obliczeniowego i wykonanie obliczeń, udział w analizie i interpretacji wyników, udział w tworzeniu koncepcji i edycji artykułu.

Uważa się, że szeroko rozumiane rynki finansowe stanowią być może najbardziej złożoną strukturę jaką obecnie znamy, co sprawia, że generowane przez nie ogromne ilości danych są szczególnie interesującym przedmiotem badań naukowych. Fundamentalnymi wielkościami, które charakteryzują rynek giełdowy

są: cena waloru, liczba transakcji oraz wolumen obrotu. Specyficznym rodzajem sprzężeń pomiędzy różnymi wielkościami są korelacje krzyżowe. Korelacje wzajemne pomiędzy bezwzględnymi wartościami fluktuacji indeksu S&P500 a wolumenem obrotu zostały zidentyfikowane w pracy [67]. Udokumentowano również, że fluktuacje dziennych cen i wolumenu obrotu na dwóch głównych chińskich rynkach (Shanghai (SHSI) i Shenzhen (SZCI)) są ze sobą skorelowane a wiążąca je zależność spełnia prawo potęgowe [68]. Nie znaleziono jednak takich korelacji pomiędzy wolumenem obrotu a stopami zwrotu czy wolumenem a liczbą transakcji.

W pracy [K3] badane są korelacje krzyżowe pomiędzy parami spośród następujących wielkości: stopy zwrotu, wolatylność (zmienność) (moduły stóp zwrotu), liczba transakcji i wolumen obrotu. Analiza opiera się na danych z 31 spółek giełdowych należących w latach 2008-2011 do amerykańskiego indeksu DJIA. Aby uniknąć efektów związanych z ewentualnymi korelacjami powodowanymi trendem dziennym, przed przystąpieniem do głównych obliczeń, usunięto trend dzienny na poziomie każdego z analizowanych sygnałów dla każdej analizowanej spółki. Ogony rozkładów prawdopodobieństwa tego typu zmiennych, a w szczególności stóp zwrotu i wolumenu obrotu spełniają prawo potęgowe dla krótkich skal czasowych Δt (rzędu sekundy czy minuty) i mają tendencję do systematycznego odejścia od tego prawa dla coraz dłuższych skal. Fakt ten został udokumentowany w naszych wcześniejszych pracach [64, 69, 70] i potwierdzony w [71]. Dane analizowano dla trzech skal czasowych $\Delta t = 1\text{min}$, 5min i 10min , których długość wynosi odpowiednio $L \approx 3 \times 10^5$, $L \approx 6 \times 10^4$ i $L \approx 3 \times 10^4$. Do badania korelacji krzyżowych użyto metody Multifraktalnej Analizy Korelacji Krzyżowych (Multifractal Cross-Correlation Analysis, (MFCCA [72])), która jest naturalnym uogólnieniem metody Detrended Cross-Correlation Analysis (DCCA [73]). Przed przystąpieniem do multifraktalnej analizy korelacji krzyżowych w pracy sprawdzono poziom multiskalowania dla wszystkich wielkości tj. logarytmicznych stóp zwrotu (R), wolatylności (zmienności) ($|R|$), liczby transakcji (T) oraz wolumenu obrotu (V). Do analizy użyto metody MF DFA. Na Rys. 2 pokazano przykład ilustrujący przebieg funkcji fluktuacji $F_q(s)$ dla dwóch spółek giełdowych (XOM (ExxonMobil) i AIG (American International Group)). Widać, że wszystkie typy sygnałów wykazują dobrą jakość skalowania ale czasami dla różnych zakresów skal s . Ten sam wynik uzyskujemy również dla pozostałych rozważanych tu akcji spółek.

Analiza sygnałów R , $|R|$, T oraz V dla wszystkich 31 spółek potwierdziła ich multifraktalne skalowanie (choć czasem dla różnych zakresów skal s). Natomiast wartość wykładnika Hursta $H \equiv h(q=2) > 0.5$ wskazuje na to iż, serie te, choć z różną siłą, są wewnętrznie skorelowane. Multifraktalne skalowanie oraz autokorelacje są dobrze znaną cechą danych giełdowych, dlatego w pracy [K3] sprawdzono ewentualne istnienie fraktalnych korelacji krzyżowych między sygnałami. Dla każdej z 31 spółek konstruowano 6 par sygnałów ($R-|R|$, $R-T$, $R-V$, $|R|-T$,

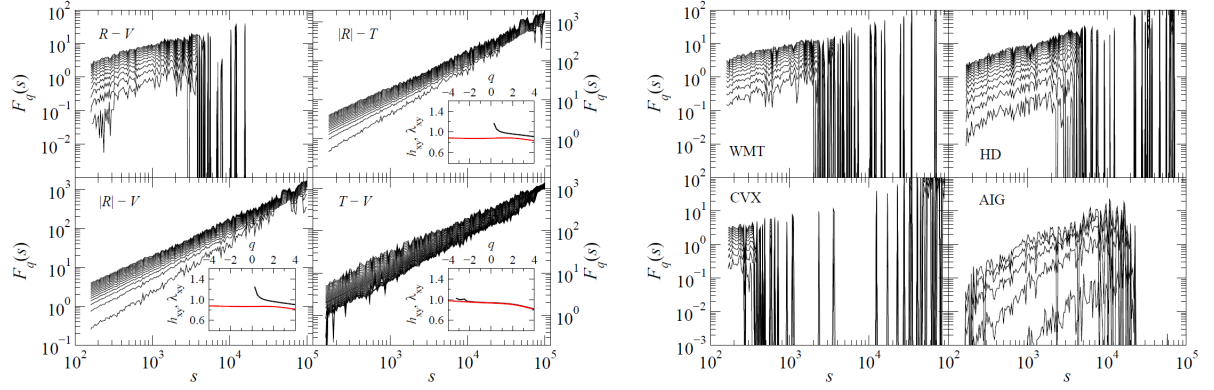


Rysunek 2: Funkcje fluktuacji $F_q(s)$ dla dwóch przykładowych akcji spółek (XOM(a) i AIG(b)) o różnych właściwościach skalowania. Wyniki dla różnych typów danych pokazano w panelach: stopy zwrotu R , zmienność $|R|$, liczba transakcji T i wolumen obrotu V .

$|R|-V$, $T-V$) i do każdej z nich zastosowano algorytm MFCCA. Wyniki pokazują, że istnieją znaczne różnice w charakterze korelacji krzyżowych pomiędzy różnymi sygnałami i są one dostrzegane na poziomie wszystkich spółek (Rys. 3).

Najsilniejsze korelacje obserwowane są pomiędzy liczbą transakcji a wolumenem obrotu ($T-V$). Najśłabsze zaś (lub często nieistniejące) pomiędzy stopami zwrotu R a pozostałymi wielkościami tj. $|R|$, T oraz V . Pary zawierające zmienność $|R|$ i liczbę transakcji T lub wolumen obrotu V prezentowały zachowanie, które klasyfikowało je pośrodku. Pokazano również, że najsilniejsze korelacje krzyżowe są przenoszone przez te części sygnałów, które charakteryzują się dużą i średnią wariancją. Ponadto charakter wszystkich korelacji krzyżowych jest niezmienniczy ze względu na zmianę skali czasowej $\Delta t = 1\text{min}$, 5min lub 10min . Nasze obserwacje skłaniają do wniosku, że silne kroskorelacje potęgowe pomiędzy liczbą transakcji a wolumenem obrotu ujawniają istnienie silnego statystycznego i fraktalnego sprzężenia pomiędzy tymi wielkościami. Tym samym popiera to założenia modelu Gabaix [74, 75], który zakłada, że duże wartości wolumenu obrotu są generowane nie przez pojedyncze duże transakcje lecz przez dużą liczbę małych. Według naszej wiedzy analiza kroskorelacji multifrakalnych przedstawionych w pracy [K3] była pierwszą tego typu analizą, która zawierała taki zestaw wielkości i takie podejście.

W pracy [K4] przedstawiono ilościową analizę zależności stóp zwrotu i wolumenu obrotu dla polskiego rynku akcji, gdzie zwrócono szczególną uwagę na relację pomiędzy stopami zwrotu a wolumenem obrotu. Obliczenia oparto na danych najwyższej dostępnej częstości 14 największych spółek giełdowych należących do indeksu WIG20 w okresie od 17.11.2000r. do 06.03.2008r. Okazało się, że chociaż



Rysunek 3: *Lewy panel: Funkcje fluktuacji korelacji krzyżowej $F_{qXY}(s)$ i wykładniki skalowania (panele wewnętrzne): $h_{xy}(q)$ (czerwony/szary) i $\lambda(q)$ (czarny) obliczone dla różnych par 1-minutowych szeregów czasowych reprezentujących akcje spółki WMT(Walmart): (a) stopy zwrotu i wolumen obrotu, (b) zmienność i liczba transakcji, (c) zmienność i wolumen oraz (d) liczba transakcji i wolumen.*

Prawy panel: Funkcje fluktuacji korelacji krzyżowej $F_{qXY}(s)$ dla pary R-V ($\Delta t = 1$ min) dla czterech spółek giełdowych. Każdy panel odpowiada innemu magazynowi. W każdym przypadku najwyższa linia odpowiada $q = 4$, a kolejne linie odpowiadają mniejszym wartościom q z krokiem $\Delta q = -0,5$.

polski rynek akcji uważany był wtedy za wschodzący to z perspektywy uzyskanych wyników posiadał cechy typowe dla rynków dojrzałych. Pokazano m.in., że rozkłady prawdopodobieństwa odpowiednio dużych fluktuacji stóp zwrotu i wolumenu obrotu spełniają prawo potęgowe. Jeżeli przyjąć, że wykładnik skalujący ogon empirycznego rozkładu stóp zwrotu ma wartość α_r a wolumenu obrotu α_V , to spełniona jest relacja

$$\frac{\alpha_r}{\alpha_V} \simeq \xi. \quad (3)$$

Oszacowana przez nas wartość $\xi \approx 2$ (lub $\xi \approx 2.5$ wg. estymatora Hill'a [76]) okazała się być stała i niezależna od skali czasowej notowań i od rodzaju analizowanej spółki giełdowej. Wartość ta różni się od otrzymanej dla rynku chińskiego ([77] tu $\xi \approx 1.5$) ale jest bliska amerykańskim spółkom giełdowym [78–80].

Relacja (3) została empirycznie zweryfikowana dla tych danych, dla których zaobserwowano potęgowe ogony rozkładów. Zależność ta nie była badana dla długich skal czasowych, dla których rozkłady stają się Gauss'owskie, ponieważ próbki danych są w takich przypadkach niewielkie.

W ogólności relacja pokazująca istnienie ścisłej zależności pomiędzy stopami zwrotu a wolumenem obrotu może być opisana empiryczną funkcją wpływu ceny $r = f(V)$, która określa w jaki sposób handel lub zagregowany wolumen modyfi-

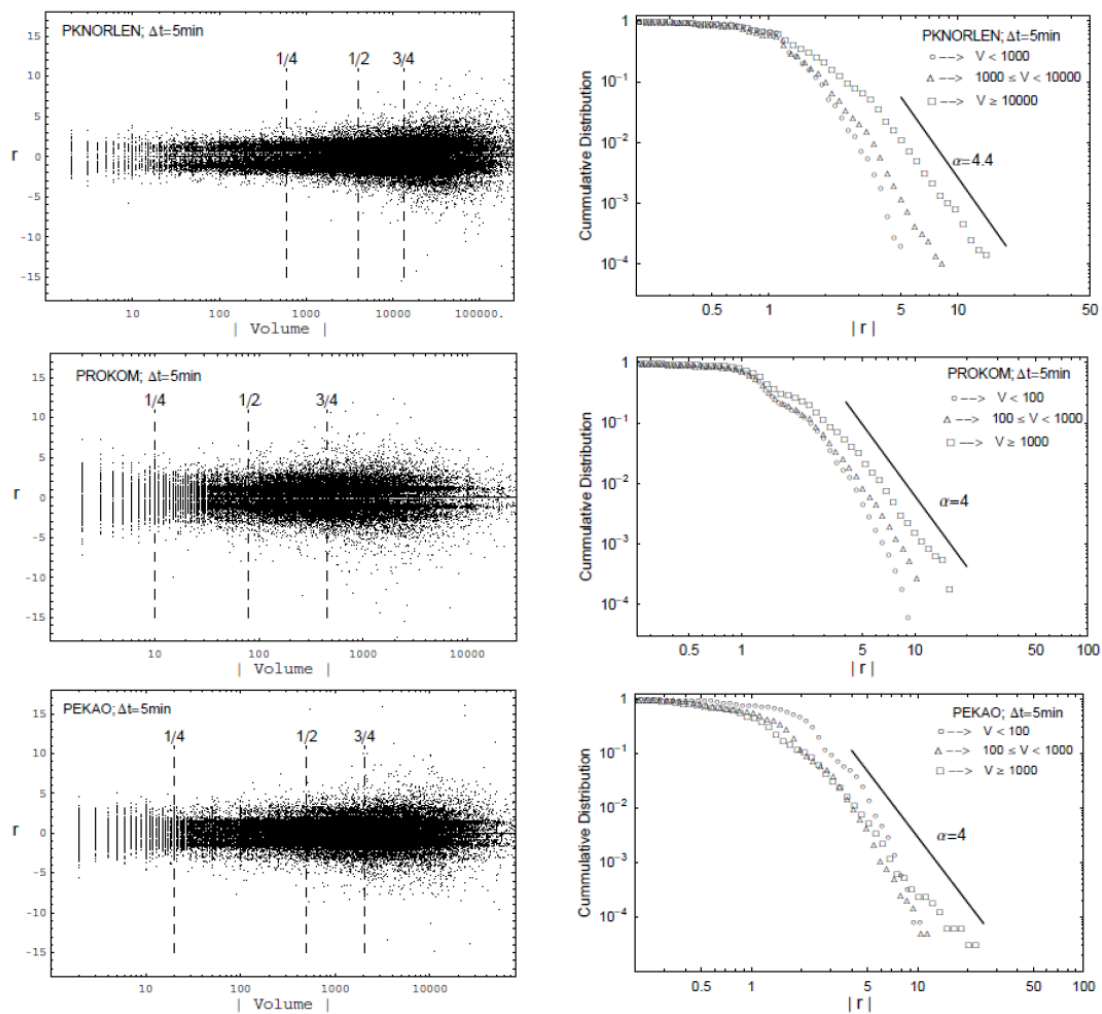
kuje cenę. Zauważono, że funkcja ta zmienia swoją formę w wyniku zmiany skali czasowej handlu, przechodząc od silnie nieliniowego charakteru dla małych skal do liniowych w przypadku dłuższych skal czasowych [81]. Jednak najbardziej znana postać tej funkcji ma charakter potęgowy:

$$r(V) = cV^\beta, \quad 0 < \beta < 1, \quad (4)$$

gdzie c jest stałą. Dotychczasowe badania dokumentują dwie różne wartości parametru β : $\beta \approx 0.5$ oraz $\beta \approx 0.3$, gdzie badano odpowiednio spółki amerykańskiego indeksu [74, 82] oraz spółki notowane na giełdzie londyńskiej [83, 84].

Na podstawie empirycznych wyników badań została sformułowana teoria, która była w stanie wyjaśnić dlaczego stopy zwrotu i wolumen obrotu związane są prawem potęgowym [74, 75, 82]. Wywołało to debatę, w której zarówno założenia teoretyczne jak i empiryczne tej teorii zostały skrytykowane. Zaproponowano wtedy alternatywne podejście, w którym główny wpływ na rozkład stóp zwrotu miały fluktuacje płynności a nie wolumen obrotu. Jednak odkąd autorzy poprzedniego modelu byli w stanie obalić główne zarzuty, wydaje się, że oba podejścia mogą być komplementarne i wskazywać na zjawiska, które w rzeczywistości współlistnieją. W dalszej części pracy [K4] odpowiadamy na pytanie czy na podstawie danych empirycznych zasadnym jest postulowanie wpływu ceny na wolumen (lub odwrotnie) opisanego równaniem (4). Dlatego szukamy ewentualnej zależności pomiędzy rozkładem stóp zwrotu (r) a wielkością wolumenu obrotu (V). W tym celu stworzymy wykres rozproszony r – V (stopy zwrotu w funkcji wielkości wolumenu). Okazało się, że rosnący wolumen obrotu powoduje wzrost wartości bezwzględnych stóp zwrotu (Rys. 4).

Aby lepiej zrozumieć to zjawisko podzielono cały zakres wartości wolumenu obrotu na trzy części ($V \leq 100$, $100 < V \leq 1000$ and $V > 1000$) i dla tych zakresów wyznaczono rozkłady stóp zwrotu. Co ciekawe, ogon rozkładu stóp zwrotu, nawet gdy nie ma charakteru potęgowego, wyraźnie zależy od wielkości wolumenu w taki sposób, że im większy wolumen tym grubszy ogon. Kolejne obliczenia pokazały, że w przypadku analizowanych tu polskich spółek giełdowych wpływ cen akcji na ich wolumen obrotu dobrze opisuje zależność $r(V) \sim V^{1/2}$.



Rysunek 4: Lewy panel: Stopy zwrotu w funkcji wolumenu obrotu dla trzech różnych spółek: PKN Orlen, Prokom, Pekao. Pionowe linie dzielą całkowitą liczbę danych na odpowiednie części. Prawy panel: Skumulowane rozkłady bezwzględnych stóp zwrotu (zmienności) odpowiadające trzem przedziałom wolumenu obrotu (oznaczono je trzema różnymi symbolami.)

- [K5] S. Drożdż, J. Kwapien, P. Oświęcimka, R. Rak, *The foreign exchange market: return distributions, multifractality, anomalous multifractality and the Epps effect*, New Journal of Physics, 12, 105003 (2010).

Mój wkład w powstanie artykułu [K5] to: udział w pozyskaniu i przygotowaniu danych numerycznych, przygotowanie części warsztatu algorytmiczno – obliczeniowego i wykonanie obliczeń, udział w analizie i interpretacji wyników, udział w tworzeniu formy i redagowaniu artykułu.

FOREX (ang. „foreign exchange”, FX) to największy rynek finansowy świata. Jest to międzynarodowy, w pełni elektroniczny i zdecentralizowany rynek wymiany walutowej, na którym inwestorzy (banki, przedsiębiorstwa, brokerzy walutowi, inwestorzy indywidualni) mogą dokonywać transakcji 24 godziny na dobę 5 dni w tygodniu. Nieporównywalny z innymi rynkami dzienny obrót sięgający 4-5 bilionów USD oraz ogromna płynność sprawiają, że FX ma bezpośredni i znaczący wpływ na wszystkie inne rynki giełdowe. FX łączy międzynarodowe instytucje finansowe uczestniczące w transakcjach wymiany walut na całym świecie oraz wpływa i reaguje zasadniczo na wszystko co dzieje się na świecie m.in. na czynniki ekonomiczne, warunki polityczne czy psychologię rynkową. Wszystko to sprawia, że FX uważany jest za wskaźnik kondycji światowej gospodarki a relacje w szeregach czasowych FX, będące konsekwencją ogromnej liczby transakcji i złożonej konwolucji różnych czynników, stanowią wyjątkowo złożoną strukturę a tym samym ogromne wyzwanie dla analiz ilościowych.

Z punktu widzenia fizyka FX jest złożonym systemem o bardzo zawiłych zależnościach czasowych. Efektywność walutowa FX’u jest wzmacniana przez korelacje między kursami walutowymi określanymi jako arbitraż trójkątny. Do badania korelacji walutowych szeregów czasowych wykorzystano analizę multifraktalną. Tego typu analiza identyfikuje ewentualne istnienie nieliniowych cech analizowanych danych w szczególności ich widma multifraktalne. Dane walutowe wykorzystane w niniejszej analizie oparto na sześciu kursach wymiany tworzących dwa trójkąty: EUR-GBP-USD i GBP-CHF-JPY (USD/EUR, EUR/GBP, GBP/USD, JPY/GBP, GBP/CHF oraz CHF/JPY). Szeregi czasowe próbkowane są z częstotliwością $\Delta t = 1$ minuty od 2 stycznia 2004r. do 30 marca 2008r. co daje 1183 dni. W konsekwencji mamy do czynienia z sześcioma zsynchronizowanymi szeregami czasowymi o długości $T = 1, 703, 520$, które oznaczamy $x_A^B(t_i)$, $i = 1, \dots, T$, gdzie $x(t_i)$ to wartość waluty A wyrażona w walucie B w czasie t_i . Logarytmiczne stopy zwrotu mają postać:

$$G_A^B(t_i; \Delta t) = \ln x_A^B(t_i + \Delta t) - \ln x_A^B(t_i), \quad (5)$$

$$G^\Delta(t_i; \Delta t) = G_A^B(t_i; \Delta t) + G_B^C(t_i; \Delta t) + G_C^A(t_i; \Delta t),$$

gdzie oczekuje się spełnienia zależności:

$$G^\Delta(t_i; \Delta t) = 0. \quad (6)$$

Odstępstwa od (6) pozwalają na tzw. możliwość arbitrażu trójkątnego, który gdy tylko zostaje wykryty jest wykorzystywany przez graczy do generowania zysków. Na współczesnych rynkach wykonanie odpowiedniej operacji zajmuje zwykle ułamek sekundy a więc znacznie krócej niż rozważana tu skala $\Delta t = 1\text{min}$, dla której efekty odejścia od zera w równaniu (6) stają się coraz mniej istotne.

Artykuł [K5] podzielono na kilka zasadniczych części. W każdej sekcji przedstawiono pewne nowatorskie wyniki nie dyskutowane wcześniej w literaturze. W rozdziale 2 pokazano, że rozkłady prawdopodobieństwa stóp zwrotu dla poszczególnych kursów par walutowych można dobrze opisać w języku nieekstensywnej statystyki a tym samym przybliżyć (podobnie jak stopy zwrotu z innych rynków finansowych) rozkładami q -Gaussa. Pokazaliśmy to dla 3 różnych skal czasowych $\Delta t = 1, 10, 60\text{min}$, gdzie pomiędzy walutami zaobserwowano istnienie niewielkich odstępstw wartości parametru q (Fig.2, Fig.3 w pracy [K5]). Została dostrzeżona również pewna asymetria pomiędzy lewymi i prawymi ogonami rozkładów, wyrażona przez nieco inne wartości parametru q . Zgodnie z oczekiwaniami, wraz ze wzrostem skali czasowej Δt wartości q zmniejszają się co odzwierciedla (wolną) konwergencję do rozkładu Gaussa ($q = 1$). Z tego punktu widzenia, spośród rozważanych tutaj par, można zauważyć jedną interesującą różnicę: spadek wartości q wraz ze wzrostem Δt jest wolniejszy dla europejskich walut (EUR/GBP i GBP/CHF) niż dla tych międzykontynentalnych. W pierwszym przypadku konwergencja w kierunku rozkładu Gaussa jest wolniejsza. Wynik ten jest jakościowo podobny do wcześniejszej obserwacji tj. z lat 1992-93 (na długo przed wprowadzeniem euro) [85]. Fakt ten pokazuje więc, że globalny rynek Forex jest w dużej mierze stabilny z punktu widzenia rozkładów fluktuacji stóp zwrotu. Ponadto wydaje się, że stopień zbieżności w kierunku rozkładu Gaussa jest podobny do ówczesnych rynków akcji ([69] oraz [K1]).

Interesującą okazała się analiza rozkładów fluktuacji odchyłeń po trójkącie (6) co zgodnie z naszą wiedzą nie było jeszcze publikowane w literaturze naukowej. Pokazano, że dla analogicznych skal czasowych $\Delta t = 1, 10$ i 60 min (w obu rozważanych tu trójkątach) rozkłady q Gauss'a pasują jedynie do centralnej części rozkładów empirycznych. Odpowiednie wartości q wolno maleją wraz ze skalą czasową Δt (dla $\Delta t = 1\text{min}$; $q \approx 1.2$) a ogony rozkładów, wraz ze wzrostem skali, stają się coraz grubsze. Dostrzeżono też "odstające" od reszty rozkładów fluktuacje, wynikające z nagłych dużych wahań w jednej z par w trójkącie, które mogą odzwierciedlać dłuższy czas potrzebny do zrównoważenia odchyłeń w danym trójkącie walutowym.

Ważnym aspektem badania fluktuacji finansowych są korelacje czasowe. W pracy [K5] przeprowadzono również analizę autokorelacji stóp zwrotu oraz ich modułów. Nieco bardziej zaawansowaną metodą identyfikacji charakteru finansowych korelacji czasowych jest użycie macierzy korelacji. W podejściu tym, zainicjowa-

nym w [86, 87], elementami macierzy są współczynniki korelacji wyliczane pomiędzy szeregami czasowymi stóp zwrotu na poziomie różnych i rozłącznych przedziałów czasowych (np. kolejne dni lub tygodnie transakcyjne). Struktura wartości i wektorów własnych takiej zdiagonalizowanej macierzy pozwala na identyfikację różnych charakterystyk korelacji czasowych czyli niezależnych składników dynamiki związanych z powtarzalnymi formami aktywności. Sygnały własne zawierają informacje bardzo specyficzne dla analizowanego systemu a istnienie dużej fluktuacji w jej przebiegu może być związane z okresowym, zewnętrznym wpływem na rynek (np. informacje ekonomiczne). Zdarza się, że takie fluktuacje są wyraźnie widoczne już na poziomie $\Delta t = 1\text{min}$ dla kursów walutowych o dużym volumenie obrotu takich jak USD/EUR czy GBP/USD i jedynie w dłuższych przedziałach czasowych dla mniej popularnych walut. To samo odnosi się do drugiego trójkąta, w którym bardziej popularne waluty jak JPY/GBP i GBP/CHF mają bardziej charakterystyczny sygnał własny dla $\Delta t = 1\text{min}$, podczas gdy mniej popularna relacja CHF/JPY ma sygnał własny zbliżony do szumu. Efekt ten odzwierciedla fakt, że mniej popularne kursy wymiany walut odgrywają rolę pasywną, dostosowując swoje wartości do dominujących walut zgodnie z regułą trójkąta (Fig.7 w pracy [K5]).

Analiza korelacji krzyżowych pomiędzy różnymi kursami walut potwierdziła, że nieefektywność rynku w krótkich okresach czasu prowadzi do pojawienia się tzw. efektu Epps'a [88] w znacznie dłuższych, choć porównywalnych do rynku akcji, skalach czasowych. Efekt Epps'a na rynku FX prawdopodobnie, analogicznie do jego odpowiednika na giełdzie pozawalutowej, jest konsekwencją skończonej szybkości rozprzestrzeniania się informacji pomiędzy aktywami. Jednym z możliwych jego źródeł jest brak synchroniczności transakcji na poziomie różnych aktywów, co wprowadza efekt podobny do szumu w ich skorelowanej ewolucji [89, 90]. Prawdopodobnie nie jest to jedyna przyczyna efektu Epps'a na rynku walutowym, gdzie częstotliwość handlu na rynku FX jest znacznie wyższa niż w przypadku rynkach akcji choć skale czasowe nasycenia są porównywalne. Sugeruje to, że jakiś inny czynnik może odgrywać ważną rolę w kształtowaniu korelacji. Inne, istotne źródła efektu Epps'a zostały już zaproponowane w literaturze [91] choć ich wpływ nie został jeszcze w pełni oszacowany.

Kolejnym etapem badań w pracy [K5] była analiza multifraktalna, która uważana jest obecnie za najbardziej efektywną - widmo multifraktalne potrafi uchwycić i scharakteryzować ewentualne bogactwo złożoności struktur i korelacji danych, którym często towarzyszą długookresowe i nieliniowe korelacje czasowe. Do analizy użyto metody MF DFA. Spektrum osobliwości $f(\alpha)$ kursów walutowych dowodzi, że analizowane fluktuacje są multifraktalne (Fig.:9, 10, 11, 12 w pracy [K5]). Szerokości spektrum (podobnie jak w przypadku giełdy) mają wartości od ok. 0.15 (dla USD/EUR) do ok. 0.25 (dla GBP/CHF, CHF/JPY oraz EUR/GBP) z maksymal-

nymi wartościami wynoszącymi $\alpha \approx 0.5$. Rozrzut maksymalnych wartości $f(\alpha)$ jest jednak większy w trójkącie GBP-CHF-JPY niż w EUR-GBP-USD. Jeszcze bardziej interesujące różnice ujawniają się w kształcie $f(\alpha)$. Większość z nich jest lewostronnie asymetryczna z odchyleniem w kierunku charakterystycznym dla bi-fraktali [K1, K2]. Najbardziej symetryczny kształt $f(\alpha)$ - podobnie jak w modelu kaskady dwumianowej - mają fluktuacje GBP/USD oraz w mniejszym stopniu USD/EUR. Co ciekawe, GBP/USD oraz USD/EUR są wiodącymi i najczęściej handlowanymi (najbardziej płynnymi) kursami walutowymi a dyskutowane wcześniej fluktuacje stóp zwrotu wyglądają najbardziej "nieregularnie" spośród wszystkich rozważanych tutaj kursów walutowych. W trójkącie GBP-CHF-JPY najbardziej symetryczny kształt $f(\alpha)$ odpowiada wiodącemu kursowi tj. JPY/GBP. Można również dostrzec związek stopnia symetrii z siłą autokorelacji modułów stóp zwrotu - silniejsza autokorelacja odpowiada bardziej symetrycznemu kształtowi spektrum multifraktalnego.

Okazało się, że konwencjonalna interpretacja wieloskalowych charakterystyk dla kursów wymiany walut nie jest zasadna w przypadku szeregów czasowych związanych z relacjami po trójkącie. Przejawia się to w specyficznej postaci funkcji fluktuacji $F_r(n)$ w konsekwencji czego spektrum multifraktalne $f(\alpha)$ ma zasadniczo rozwiniętą jedynie lewą stronę. Tego typu efekty zostały już dostrzeżone i opisane w literaturze [93–95] w zastosowaniach związanych m.in. z agregacją z ograniczoną dyfuzją oraz w turbulencji.

Jeszcze bardziej intrygującym jest fakt, że widma multifraktalne fluktuacji trójkątnych mają ujemne wartości. Zgodnie z naszą dotychczasową wiedzą, taka anomalna forma multifraktalności nigdy nie została wcześniej zidentyfikowana w kontekście dynamiki fluktuacji finansowych. Jednak taka struktura $f(\alpha)$ może być związana z założeniami Mandelbrota [96] na temat dynamiki płynów oraz z koncepcjami na temat ujemnych wymiarów krytycznych [97]. Wszystko to otwiera ekscytujący kierunek badań ustanowienia bliższej analogii pomiędzy dynamiką kursów wymiany walut a zjawiskiem turbulencji.

[K6] R. Rak, P. Zięba, *Multifractal flexibly detrended fluctuation analysis*, Acta Physica Polonica B, 46, 1925 (2015).

Mój wkład w powstanie artykułu [K6] to: pozyskanie i przygotowanie danych numerycznych, udział w przygotowaniu warsztatu algorytmiczno – obliczeniowego i wykonanie obliczeń, udział w analizie i interpretacji wyników, udział w tworzeniu koncepcji i edycji artykułu.

Obecnie istnieją metody, które poprawnie potrafią w sposób ilościowy zidentyfikować ewentualną złożoność analizowanych danych. Najbardziej uznane w literaturze to m.in.: metoda przeskalowywania zakresów (rescaled range analysis (R/S)) [98–100], analiza zdetrendowanych fluktuacji (detrended fluctuation analysis (DFA)) [101–103], metoda modułu maksimów transformaty falkowej (Wavelet Transform Modulus Maxima, WTMM) [65, 105], metoda zdretrendowanych średnich ruchomych (detrended moving average (DMA)) [106–109] oraz multifrakalna analiza zdretrendowanych średnich ruchomych (multifractal detrending moving average (MFDMA)) [110]. Natomiast dwie najbardziej znane metody identyfikujące wieloskalową strukturę danych to: multifrakalna analiza zdetrendowanych fluktuacji (multifractal detrended cross-correlation analysis (MFDFA)) [51, 66, 104] oraz multifrakalna analiza korelacji krzyżowych (multifractal cross-correlation analysis (MFCCA)) [72, 112]. Wszystkie wspomniane powyżej metody wiąże to iż każda z nich detrenduje analizowane fluktuacje. I choć trend jest nieodzowną cechą charakterystyczną danych to proces jego usuwania jest stosowany w celu swego rodzaju normalizacji danych. W wielu wspomnianych metodach do usuwania trendu stosuje się wielomiany. Z uwagi na to, iż ostateczny wynik często zależy od stopnia wielomianu [33], pojawia się pytanie: jaki stopień m wielomianu użyć aby najlepiej usunąć trend? To pytanie wiąże się z innym pytaniem mianowicie: co oznacza perfekcyjne usunięcie trendu i co jest miarą detrendowania?

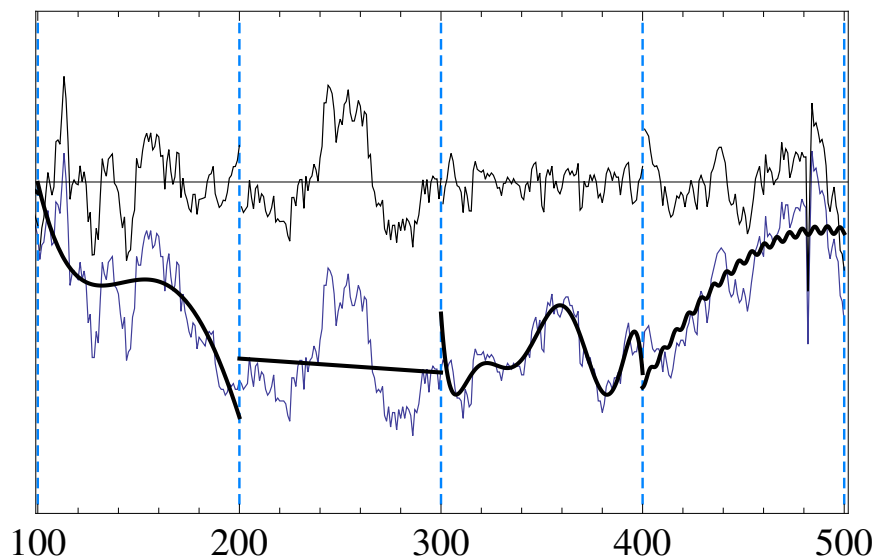
W artykule [K6] proponujemy modyfikację (uogólnienie) całej klasy metod używających wielomianów do detrendowania danych. Proponujemy aby stopień m wielomianu nie był stały ($m \neq const.$) a jego wybór był rządzone przez ustalone kryterium. Druga modyfikacja zostanie opisana poniżej (*Krok 2*). Uogólnienie metody uzyskujemy modyfikując algorytm MFDFA i nazywamy go MFFDFA (Multifractal Flexibly Detrended Fluctuation Analysis). Aby lepiej zrozumieć ideę przedmiotowej modyfikacji poniżej przedstawię etapy algorytmu MFFDFA.

Krok 1: rozważmy sygnał $x(i)$, gdzie $i = 1, \dots, N$. Następnie wyznaczamy skumulowaną sumę $Y(j) = \sum_{i=1}^j [x_i - \langle x \rangle]$, $j = 1, \dots, N$, gdzie $\langle x \rangle$ jest średnią po długości serii N .

Krok 2: profil Y jest dzielony na M_{s_k} częściowo pokrywających się części ν o długości s . Częściowe pokrycie realizowane jest z krokiem $\lfloor s/k \rfloor$, gdzie $k = 1, 2, 3, \dots$. Jest to pierwsza z wprowadzonych przez nas modyfikacji. W oryginalnym algorytmie MFDFA przedziały nie przykrywają się. W wyniku tej modyfikacji

otrzymujemy ok. k razy więcej interwałów ν niż w oryginalnym podejściu. Minimalna (s_{min}) i maksymalna (s_{max}) długość przedziałów s ściśle zależy od długości N serii czasowej. W praktyce przyjmuje się $s_{min} = 30$ i $s_{max} = \lfloor N/10 \rfloor$.

Krok 3: dla każdego przedziału estymowany jest trend poprzez dopasowanie wszystkich funkcji ze zbioru $Q = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. Następnie zgodnie z przyjętym kryterium wybierana jest tylko jedna funkcja detrendująca, z użyciem której w danym segmencie usuwany jest trend. Przykład detrendowania różnymi wielomianami pokazano na (Rys. 5).



Rysunek 5: Przykład detrendowania danych różnymi wielomianami w przedziałach.

Krok 4: dla tak zdetrendowanego sygnału w każdym segmencie ν obliczamy lokalną wariancję

$$F^2(\nu, s) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \{Y((\nu - 1)s + k) - f_n^{(\nu)}(k)\}^2$$

a następnie jej średnią dla każdego s :

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{M_{s_k}} \sum_{\nu=1}^{M_{s_k}} [F^2(\nu, s)]^{q/2} \right\}^{1/q}, \quad q \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Krok 5: jeżeli analizowany sygnał ma naturę fraktalną, to F_q spełnia relację potęgową:

$$F_q \sim s^{h(q)},$$

gdzie $h(q)$ jest uogólnionym wykładnikiem Hurst'a. Jeżeli $h(q)$ jest niezależne od q ($h(q) = H = \text{const.}$), to sygnał jest monofrakalny w przeciwnym razie sygnał

jest multifrakalny. Ostatecznie obliczane jest spektrum osobliwości

$$f(\alpha) = q[\alpha - h(q)] + 1, \quad \text{gdzie} \quad \alpha = h(q) + qh'(q).$$

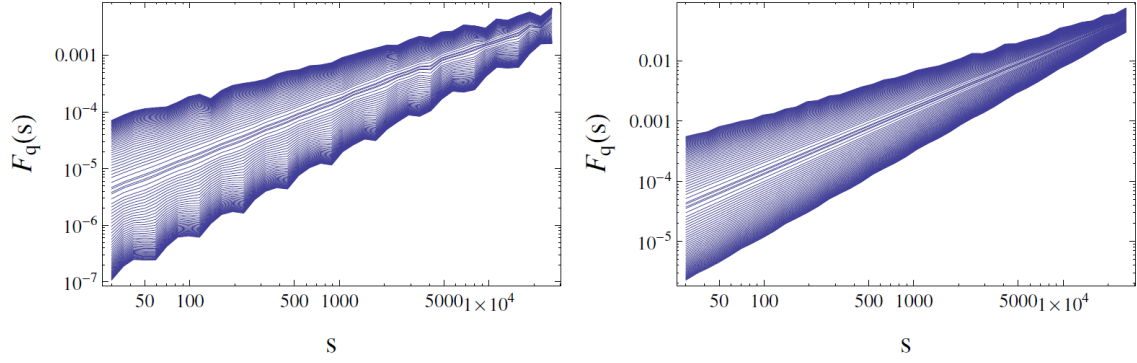
Bogactwo złożoności analizowanych danych można ocenić na podstawie szerokości spektrum $f(\alpha)$:

$$\Delta\alpha = \alpha_{max} - \alpha_{min}.$$

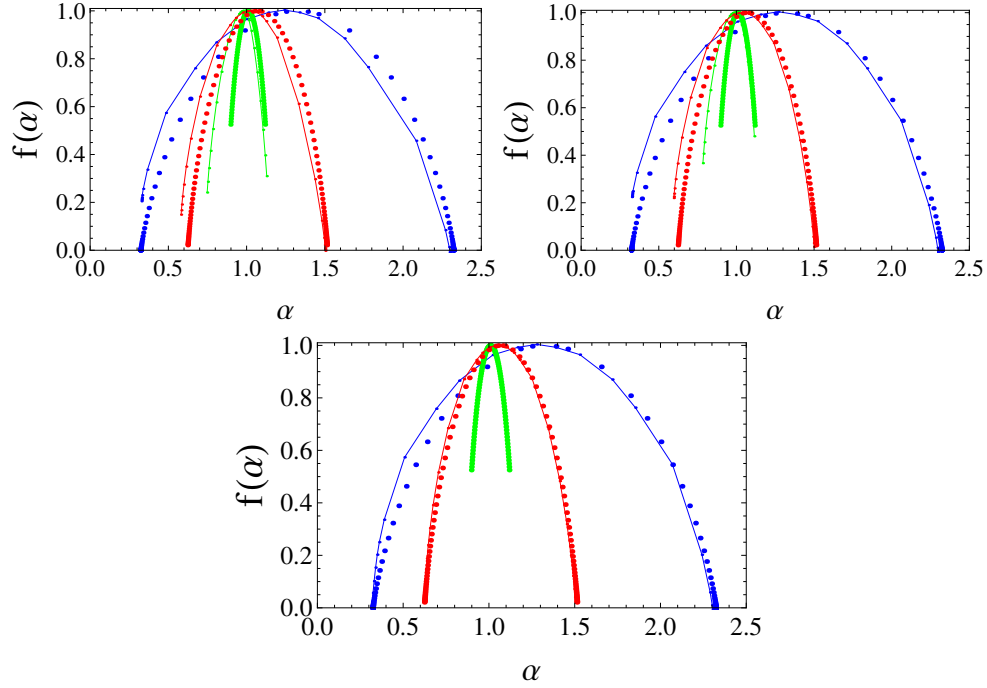
Im większa wartość $\Delta\alpha$ tym bardziej wieloskalowość struktury jest złożona. Jeśli $\Delta\alpha \approx 0$, to sygnał jest monofrakalny.

W pracy [K6] testujemy proponowaną metodę MFFDFA zarówno na danych syntetycznych jak i rzeczywistych. Dla wszystkich rodzajów danych założono arbitralnie, że zbiór Q składa się z trzech funkcji detrendujących: $Q = \{f_1, f_2, f_3\} = \{ax^2 + bx + c, a \sin(x^2) + bx + c, ax^3 + bx + c\}$, gdzie $\{a, b, c\}$ są stałymi. Ponadto przyjęto, że kryterium wyboru jednej z nich opiera się na wartości współczynnika jakości regresji R^2 - maksymalna wartość determinuje wybór jednej z funkcji f_n . Przyjęto również $q = \langle -10, 10 \rangle$. Do testów wykorzystano dwa rodzaje sztucznie generowanych danych tj. ułamkowy ruch Brown'a (urB) i kaskadę dwumianową. Dla urB generowano 3 typy serii czasowych (każda o długości 10,000 punktów) zależnych od zadanego wykładnika Hurst'a $H = \{0.3, 0.5, 0.9\}$. W pierwszej kolejności przeprowadzono test wpływu zwiększenia liczby interwałów ν poprzez ich częściowe pokrywanie się (*krok 2*) oraz wpływu wielomianu detrendującego na wyznaczone numerycznie wartości H oraz $\Delta\alpha$. Otrzymane wyniki uśredniono po 10 próbach. Okazało się, że w obu przypadkach istotny wpływ na wynik ma stopień wielomianu m . Im większa wartość m tym wynik coraz bardziej odbiega od wartości teoretycznych zarówno na poziomie H oraz $\Delta\alpha$. Dla wielomianów stopnia $m \leq 5$ wyniki są najbardziej zbliżone do wartości teoretycznych. Natomiast uwzględnienie poprawki opisanej w kroku 2 spowodowało, iż otrzymane wartości H , dla $m \leq 3$, były znacznie bliższe wartości teoretycznych a szerokości spektrum multifrakalnego $\Delta\alpha$ bliższe 0. Jeszcze lepsze rezultaty otrzymano stosując wszystkie poprawki uwzględnione w kroku 2, 3 i 4: $H = \{0.302, 0.497, 0.903\}$ oraz $\Delta\alpha = \{0.01, 0.012, 0.015\}$. Oznacza to, że metoda MFFDFA znacznie lepiej identyfikuje monofrakalny charakter analizowanych danych niż standardowa metoda MF DFA.

Analogiczny scenariusz testów przeprowadzono w przypadku multifrakalnej kaskady dwumianowej [66]. Testy przeprowadzono dla trzech różnych parametrów $a = \{0.55, 0.65, 0.8\}$, które bezpośrednio odpowiadają za własności multifrakalne serii czasowych. Podobnie jak dla urB otrzymane wartości H oraz $\Delta\alpha$ ściśle zależą od wyboru stopnia wielomianu detrendującego, gdzie wyniki najbardziej zbliżone do teorii uzyskano dla $m \leq 3$ a uwzględnienie poprawki z *kroku 2*, zgodnie z oczekiwaniami, jeszcze bardziej poprawiło wynik.



Rysunek 6: Funkcja fluktuacji $F_q(s)$ obliczona dwoma metodami: standardowa metoda MFDDFA (lewy panel) i metoda MFDDFA (prawy panel) dla deterministycznej kaskady dwumianowej z parametrem $a = 0,65$.

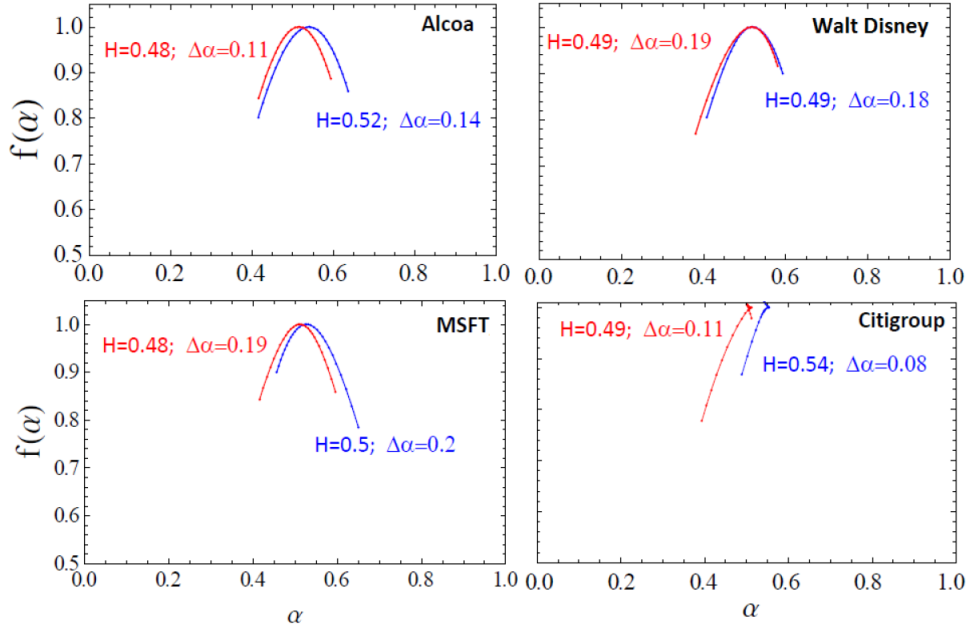


Rysunek 7: Widma osobliwości $f(\alpha)$ kaskady dwumianowej dla klasycznej metody MFDDFA i MFDDFA. Punkty i linie ciągłe odnoszą się odpowiednio do wyników teoretycznych i numerycznych. Kolory wskazują wyniki dla różnych parametrów fraktalnych a – zielony, czerwony i niebieski oznaczają odpowiednio $a = \{0,55, 0,65, 0,8\}$. Lewy górny panel: analiza dla standardowego MFDDFA dla wielomianu detrendującego rzędu 3. Górny prawy panel: analiza dla zmodyfikowanego MFDDFA z uwzględnieniem poprawki Step 2. Dolny panel: analiza metodą MFDDFA.

W ostatnim etapie zestawiono wyniki dla metod: MFDFA (dla wielomianu $m = 3$), MFDFA z poprawką opisaną w *kroku 2* (dla $m = 3$) oraz MFFDFA. Najlepszą okazała się metoda MFFDFA - struktura spektrum multifraktalnego niemal idealnie pokrywa się z przewidywaniami teoretycznymi zarówno dla serii mających bardziej monofraktalny charakter (tj. dla $a = 0.55$) jak i dla serii multifraktalnych (tj. dla $a = 0.65$ czy $a = 0.8$). Potwierdzeniem tego faktu jest również postać funkcji fluktuacji, która w przypadku metody MFFDFA jest znacznie bardziej gładka i potęgowa (Rys. 6, Rys. 7).

Testy numeryczne serii rzeczywistych przeprowadzono w oparciu o fluktuacje jednodominutowych logarytmicznych stóp zwrotu 4 amerykańskich spółek giełdowych należących do indeksu DJIA notowanych w okresie od 01.01.2008 do 07.15.2011: Alcoa (AA), Walt Disney (DIS), Microsoft (MSFT) i Citigroup Inc. (C). Spółki te dobrano tak aby reprezentowały różne sektory przemysłu. Analiza serii sztucznie generowanych pokazała, że zarówno dla sygnałów mono- i multi- fraktalnych metoda MFDFA daje rezultaty bliższe przewidywaniom teoretycznym dla wielomianów niskich rzędów. Dlatego dla serii rzeczywistych, w kolejnych testach, w metodzie MFDFA wybrano wielomian stopnia $m = 2$. Podobnie jak w przypadku serii syntetycznych w seriach rzeczywistych dostrzeżono wyraźny wpływ doboru wielomianu zarówno dla klasycznej metody MFDFA jak i dla metody MFDFA z uwzględnieniem poprawki opisaney w *kroku 2*. Dla każdej spółki obserwuje się, że wraz ze wzrostem stopnia wielomianu m maleje wartość H wskazując, że analizowane serie czasowe są obojętne persystentnie dla $m \leq 3$ ($H \approx 0.5$) i stają się coraz bardziej antypersystentne dla $m \geq 4$ osiągając wartość $H \approx 0.42$ dla $m = 10$. Mniejszą wrażliwość na stopień wielomianu detrendującego zaobserwowano natomiast dla szerokości spektrum multifraktalnego $\Delta\alpha$. Następnie porównano spektra multifraktalne wyznaczone metodą MFDFA i MFFDFA. O ile ich struktura graficzna miała podobny charakter dla każdej spółki to wartości H oraz $\Delta\alpha$ różniły się.

Największą różnicę pomiędzy wynikami dla obu metod otrzymano dla spółki Citigroup (Rys. 8). Dla MFDFA i MFFDFA otrzymano odpowiednio: $H = 0.49, \Delta\alpha = 0.11$ oraz $H = 0.54, \Delta\alpha = 0.08$. Oznacza to, iż metoda MFFDFA w stosunku do metody MFDFA klasyfikuje analizowany sygnał jako bardziej persystentny. Dostrzegalne różnice w wynikach są oczywiście konsekwencją wprowadzenia do metody MFDFA dwóch poprawek, gdzie ta związana z detrendowaniem wnosi największy wkład. W metodzie MFDFA używa się tylko jednego wielomianu (tu stopnia 2). W metodzie MFFDFA, dla każdego segmentu, wybierano jedną z trzech najlepiej dopasowanych funkcji ze zbioru Q . Dla analizowanych tu danych rzeczywistych funkcje $\{f_1, f_2, f_3\}$ stanowiły odpowiednio 21%, 40% i 39% całości.



Rysunek 8: Widma osobliwości $f(\alpha)$ jednogodzinnych stóp zwrotu dla 4 spółek indeksu Dow Jones Industrial notowanych w okresie od 01-01-2008 do 15-07-2011 - analiza porównawcza metody MFDDFA z wielomianem detrendującym 2-go stopnia (czerwony) i metody MFFDDFA (niebieskie).

[K7] R. Rak, S. Bwanakare, *Quantitative Characteristics of Correlations of Meteorological Data*, Acta Physica Polonica A, 129, 922 (2016).

Mój wkład w powstanie artykułu [K7] to: pozyskanie i przygotowanie danych numerycznych, przygotowanie warsztatu algorytmicznego – obliczeniowego i wykonanie obliczeń, udział w analizie i interpretacji wyników, udział w tworzeniu koncepcji i edycji artykułu.

W pracach [K1]–[K6] przedmiotem badań były dane rzeczywiste reprezentowane przez finansowe szeregi czasowe. Natomiast w pracy [K7] podjęto próbę analizy ilościowej danych meteorologicznych. Były to dane zebrane w stacji meteorologicznej pod Lublinem w okresie od 07.05.2001r. do 10.04.2009r. Analizie poddano cztery wielkości rejestrowane co 60 minut: $T1$ - zmiany temperatury powietrza na wysokości 2 metrów, $T2$ - zmiany temperatury przy gruncie, W - fluktuacje prędkości wiatru oraz H - fluktuacje wilgotności powietrza. Dane te zostały zbadane z dwóch różnych perspektyw tj. z perspektywy pojedynczych i niezależnych od siebie serii czasowych oraz z perspektywy ich ewentualnych wzajemnych korelacji. W samym przebiegu czasowym dostrzegalna jest wyraźna klasteryzacja danych, która jest naturalnym efektem związanym z przeplataniem się dnia i nocy czy pór roku. Pierwszym elementem analizy była charakterystyka rozkładów

prawdopodobieństwa. Szczególną uwagę zwrócono na relatywnie duże fluktuacje, dlatego też skumulowane rozkłady przedstawiono w skali log-log. Okazało się, że rozkłady wszystkich 4 wielkości meteorologicznych mają ogony o charakterze potęgowym, gdzie najgrubszy ogon miały fluktuacje związane z temperaturą gruntu ($\beta = 3$). Kolejnym etapem była analiza multifraktalna. Tu zastosowano metodę MFDFA. Uzyskane spektra osobliwości wskazują iż analizowane serie mają naturę multifraktalną. Trzy z nich ($T1$, W , H) mają podobny charakter tj. maksimum w $\alpha \approx 0.15$ oraz szerokość spektrum na poziomie $\Delta\alpha \approx 0.2$. Wyróżnia się natomiast spektrum związane z temperaturą przy gruncie - jest ponad 4 razy szersze a jego maksimum i w konsekwencji wartość wykładnika Hurst'a H przesunięte jest w prawo ($\alpha \approx 0.35$). To z kolei oznacza, że fluktuacje zmian temperatury gruntu mają znacznie bogatszą multifraktalną strukturę wewnętrzną a ich charakter jest bardziej persystentny w stosunku do pozostałych wielkości.

W celu zidentyfikowania ewentualnych korelacji krzyżowych na poziomie multifrakalnym pomiędzy $T1$, $T2$, W i H korzystamy z metody MFCCA. Rozważamy następujące pary: $W - H$, $T1 - T2$, $W - T2$, $H - T2$, $W - T$ oraz $H - T1$. Okazało się, że funkcja fluktuacji $F_{qXY}(s)$, we wszystkich przypadkach, jest dobrze zdefiniowana jedynie dla dużych fluktuacji tj. dla $q > 0$. Oznacza to, że rozważane tu dane meteorologiczne mają charakter nieskorelowanego szumu na poziomie małych fluktuacji. Tego typu efekt został udokumentowany dla danych finansowych w pracy [K3]. Dla wszystkich 6 par przedstawiono dwie najważniejsze wielkości, które identyfikują ewentualne korelacje wzajemne. Były to $\lambda(q)$ oraz $h_{xy}(q)$, gdzie $h_{xy}(q) = (h_x(q) + h_y(q))/2$ jest średnią uogólnionych wykładników Hurst'a sygnałów x i y a $\lambda(q)$ jest wykładnikiem skalującym spełniającym relację $F_{qXY}(s) \sim s^{\lambda(q)}$. Siłę korelacji wzajemnych stanowi poziom pokrywania się tych wielkości. Najsilniejszą zależność λ oraz h_{xy} od q , a więc najbardziej multifrakalny charakter, zaobserwowano dla pary $T1 - T2$ (tu przebieg ma najbardziej nieliniowy charakter). W przypadku tej pary dostrzegalna jest również niemal idealna zgodność wartości $\lambda(q)$ oraz h dla wszystkich $q > 0$. Oznacza to, że temperatury na poziomie gruntu i na wysokości 2 metrów są najbardziej skorelowane podczas gdy pozostałe pary nie wykazują tak silnego efektu. Jest to ciekawa obserwacja ponieważ nie jest ona do końca zgodna z intuicją gdyż temperatura na poziomie 2 metrów jest znacznie bardziej zmienna w stosunku do temperatury gruntu. Można by się raczej spodziewać, że temperatura $T1$ będzie znacznie bardziej skorelowana np. ze zmianami prędkości wiatru czy wilgotności.

W kolejnym rozdziale przeprowadzono niezależną analizę korelacji wzajemnych używając metody powszechnie uznanej w ekonomii. Metoda ta, nazywana wektorową autokorelacją (VAR), została zaproponowana przez noblistę w dziedzinie ekonomii Ch.A. Sims'a [113]. Co ciekawe uzyskane wyniki są wysoce konsystentne z wynikami uzyskanymi metodą MFCCA i potwierdzają, że najbardziej skorelowane

są temperatura gruntu i temperatura powietrza. Wydaje się więc, że z praktycznego punktu widzenia tego typu wnioski mogą być bardzo pomocne np. w procesie planowania produkcji rolnej.

[K8] R. Rak, J. Kwapien, P. Oświęcimka, P. Zięba, S. Drożdż, *Universal features of mountain ridge networks on Earth*, Journal of Complex Networks, 8(1), cnz17, OXFORD UNIV PRESS (2020).

Mój wkład w powstanie artykułu [K8] to: udział w pozyskaniu i przygotowaniu danych numerycznych, udział w przygotowaniu warsztatu algorytmiczno – obliczeniowego, wykonanie obliczeń, udział w analizie i interpretacji wyników, udział w tworzeniu formy i redagowaniu artykułu.

Góry należą do najczęściej występujących struktur geomorfologicznych [114]. Czasami przyjmują prostą formę izolowanych szczytów, jak aktywne stratowulkany lub tepui, ale zazwyczaj tworzą całe pasma o bogatej wewnętrznej strukturze grzbietów, które tworzą łańcuchy szczytów, rozwidlają się i posiadają boczne grzbiety i zanikają w dolinach lub na nizinach. Ich złożoność wynika z faktu, że podlegają one współbieżnym, choć przeplatającym się procesom wypiętrzania, fałdowania, przemieszczania górotworu wzdłuż uskoku, wietrzenia, erozji i transportu rzeczno i lodowcowego oraz ruchów mas opadających w dół na skutek osuwisk i dyfuzji, podczas których pierwotnie bardziej płaski, ale wzniesiony teren jest stopniowo rzeźbiony najpierw w płytkie strumyki, a następnie kształtowany w kombinację bardziej okazałych grzbietów, wąwozów i dolin [115–123]. Ponieważ doliny są powiązane z systemami odwadniania powierzchniowego, za wyjątkiem dość rzadko występujących obszarów endoreicznych, zdecydowana większość pasm górskich tworzy hierarchiczne, drzewiaste systemy graniowe oraz sieci rzeczne [124]. System grzbietowo-dolinowy typowego pasma górskiego, niezależnie od jego położenia geograficznego, przyjmuje strukturę dendrytyczną, równoległą lub kratową, o wyraźnej hierarchii i samopodobieństwie. Cechy te tworzą systemy kalenicowe i odwadniające, które często przypominają naturalne fraktale. Samopodobieństwo strukturalne zostało szeroko zbadane w systemach wodnych, dla których istnieje kilka dobrze ugruntowanych relacji potęgowych, które funkcjonalnie łączą takie wielkości jak długość strumieni i długość dorzecza strumieni, długość strumieni i powierzchni dorzecza [125–127]. Rozkłady prawdopodobieństwa niektórych z tych wielkości, takich jak powierzchnia dorzeczy i długość strumieni, również posiadają ogony potęgowe. Istnieje wiele sposobów mapowania systemów graniowych i dolin do reprezentacji graficznych. Do najlepiej zbadanych przykładów takich reprezentacji można zaliczyć grafy Reeba [128], drzewa konturowe [129], grafy Pfaltza [130] i sieci powierzchniowe [131]. Choć każda z tych reprezentacji wykorzystuje swoje charakterystyczne odwzorowanie, żadna z nich nie traktuje systemów graniowych jako połączonych linii grzbietowych, pozbawionych jakiegokolwiek struktury wewnętrznej składającej się z wyróżnionych punktów krytycznych: szczytów i

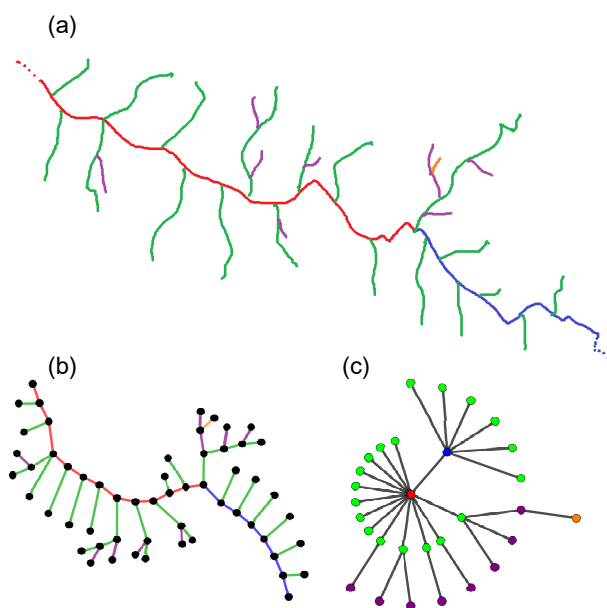
przełączy. Zatem z punktu widzenia analizy sieci grani górskich, konstruując grafy Reeba lub sieci powierzchniowe, można doprowadzić do nadmiernego i niepożądanego zbioru informacji.

Dlatego żadna z powyższych reprezentacji nie wydaje się najbardziej naturalna i efektywna jeżeli chcemy wziąć pod uwagę wyłącznie topologię systemu grani górskich. Zamiast tego wybieramy podejście, które wykorzystuje dwie następujące reprezentacje. Pierwszą z nich nazywamy reprezentacją „topograficzną”. Tutaj grzbiety(granie) są reprezentowane przez krawędzie, a rozwidlenia grani przez węzły. W ten sposób można skonstruować zarówno sieci binarne jak i sieci ważone, z wagami określonymi przez np. wysokości (maksymalną, średnią lub względną) odpowiednich odcinków grani. Najbardziej charakterystyczną właściwością takich sieci jest ich bezpośrednia zgodność wizualna z topografią badanych obszarów, zwłaszcza jeśli długości krawędzi są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków.

Druga reprezentacja sieci jest stosunkowo bardziej abstrakcyjna z topograficznego punktu widzenia: każdy węzeł jest powiązany z granią, a krawędzie łączą ten węzeł z węzłami reprezentującymi grani główną i grzbiety boczne. Oczywiście sieci w obu reprezentacjach tworzą sieci spójne, jeśli odpowiadające im pasmo górskie nie zawiera żadnego terytorium endoreicznego. Struktura dendrytyczna powstałych sieci stanowi zasadniczą przewagę naszego podejścia w porównaniu na przykład z sieciami powierzchniowymi zawierającymi cykle, ponieważ niektóre podstawowe parametry topologiczne (takie jak średnia najkrótsza droga) są znacznie łatwiejsze do wyznaczenia.

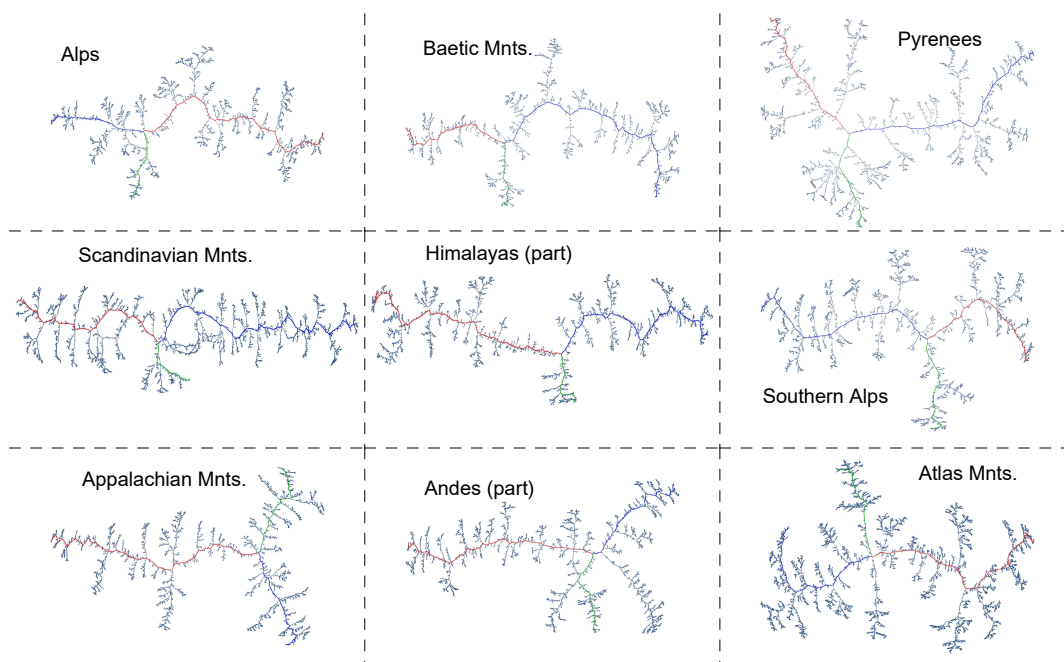
W pracy [K8] postawiono trzy podstawowe pytania: jakie są cechy topologiczne sieci w obu reprezentacjach?; czy te cechy zależą od zasięgu lub czy istnieją jakieś uniwersalne cechy topologiczne sieci, które mogą odzwierciedlać pewną uniwersalność struktury terenów górskich?; czy samopodobieństwo pozostawia jakieś ślady w topologii sieci? Do analizy wybrano następujące pasma górskie: Alpy, Pireneje, Góry Betyckie, Góry Skandynawskie, Alpy Południowe, Appalache, Góry Atlas oraz część Himalajów i Andów. Wybrane góry różnią się lokalizacją, maksymalną wysokością i wielkością zajmowanego obszaru, a także pochodzą z różnych epok geologicznych. Wszystkie pasma, z wyjątkiem jednego, są produktami zderzeń płyt tektonicznych (orogenezy), natomiast uważa się, że Góry Skandynawskie, powstały wyłącznie w wyniku wypiętrzenia i erozji powierzchni styku litosfery kontynentalnej i oceanicznej [132,133]. Szczegóły parametrów poszczególnych pasm zawarto w tabeli Tab.1 w pracy [K8]. Na Rys.9(b) i (c) zilustrowano jak na podstawie mapy grzbietów z Rys.9(a) skonstruowano odpowiednio dwa typy sieci: tzw. sieć topograficzną (poszczególne grzbiety można łatwo zidentyfikować patrząc na jej topologię) oraz sieć graniową.

Sieci topograficzne oraz sieci graniowe dla 9 pasm górskich rozpatrywanych w

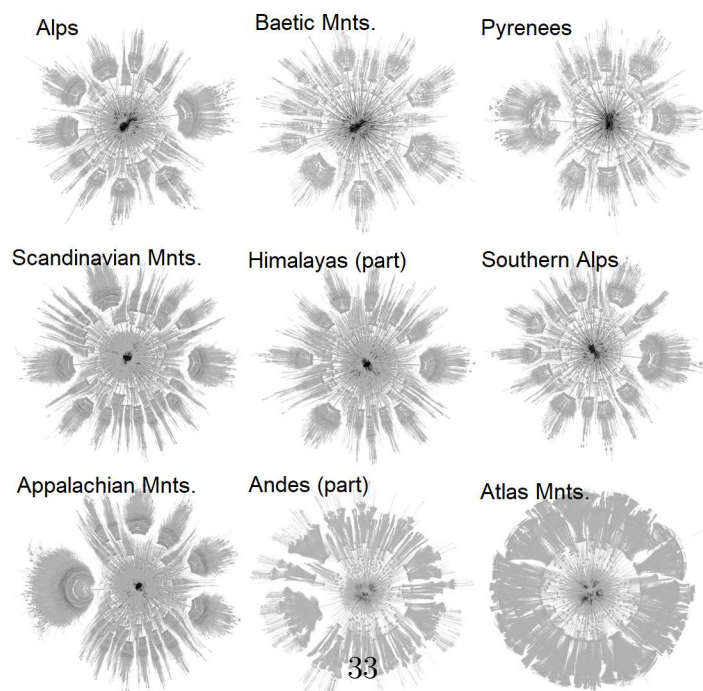


Rysunek 9: (a) Mapa linii grzbietów hipotetycznego systemu grani górskich z kolorami oznaczającymi rzędy grzbietów (z wyjątkiem niebieskiej i czerwonej linii oznaczających części głównego grzbietu); uzyskane z (a): sieć topograficzna (b) oraz sieć graniowa (c).

tej pracy przedstawiono odpowiednio na Rys.10 oraz Rys.11.



Rysunek 10: Sieci topograficzne reprezentujące 9 pasm górskich rozważane w pracy [K8]. Każdy węzeł odpowiada punktowi połączenia grani lub punktowi końcowemu grań, natomiast każda krawędź łączy parę węzłów w taki sposób, że odpowiednie punkty terenu są połączone osią grzbietu bez przechodzenia przez żaden węzeł pośredni. Krawędzie są binarne, a ich długości nie są powiązane z rzeczywistymi długościami grzbietu. W każdym przypadku grań główna podzielona jest na dwie części (niebieską i czerwoną).



Rysunek 11: Sieci graniowe pasm górskich rozpatrywanych w pracy [K8]. Każdy węzeł odpowiada grani, a każda krawędź binarna odpowiada punktowi połączenia/rozwidlenia odpowiednich grzbietów. Dwa najsilniej połączone węzły dla każdego pasma górskiego reprezentują dwie części głównej grani (niebieska i czerwona linia na Rys.10).

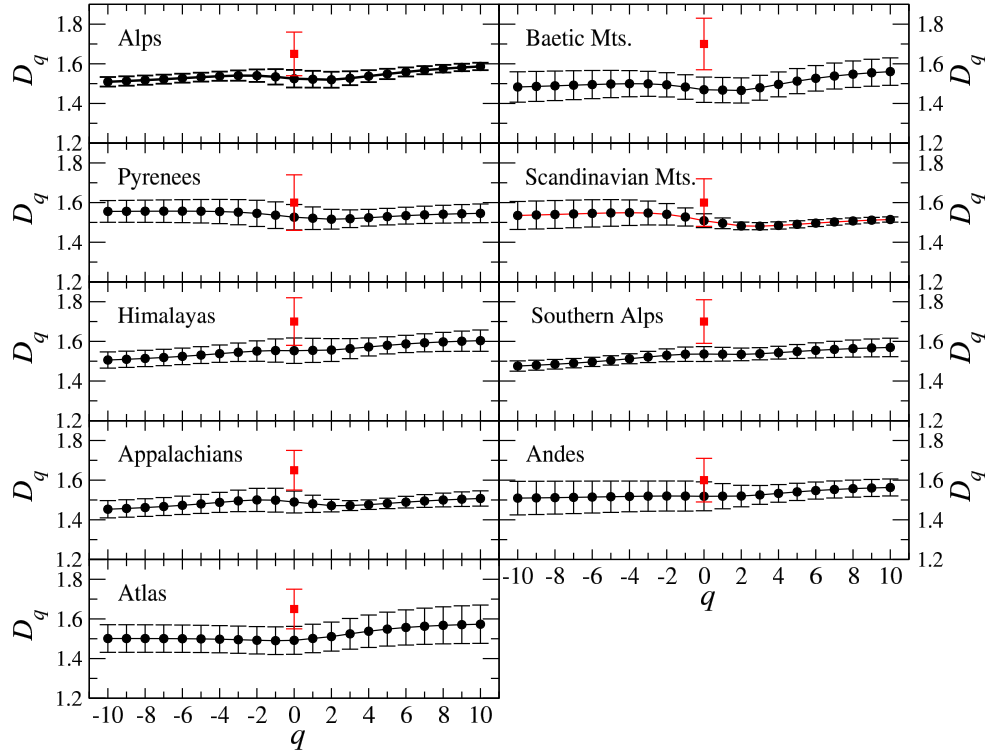
Podstawowe charakterystyki topologiczne reprezentacji sieci topograficznych i graniowych tj. liczba węzłów N , maksymalny rząd grani $R_{\max}$, średnia długość najkrótszej drogi L , średnica sieci D , średnia warstwa zajętości (mean occupation layer) $\langle m \rangle$, maksymalny stopień węzła $k_{\max}$ i wykładnik skalowania β (ten ostatni został obliczony tylko dla sieci graniowych ponieważ w sieciach topograficznych skalowania nie obserwuje się) pokazano w tabeli Tab.2 w pracy [K8].

Wyniki analizy fraktalnej (użyto metody box-covering [134]), wskazują, że sieci topograficzne dziedziczą fraktalną strukturę pasm górskich, są sieciami rozproszonymi o długich średnich najkrótszych ścieżkach i strukturze fraktalnej o wymiarze fraktalnym $1,6 \leq d_f \leq 1,7$. Nie wykazują jednak żadnych innych złożonych cech. Natomiast sieci grzbietowe nie mają natury fraktalnej prawdopodobnie ze względu na posiadaną assortatywność: haby połączone są bezpośrednio z innymi habami najczęściej bez żadnych węzłów pośrednich. Jednakże sieci grzbietowe są bezskalne a wykładnik rozkładu krotności węzłów wynosi $1,6 \leq \beta \leq 1,7$.

Ponieważ specyficzna struktura powierzchni terenu wykazuje oznaki multifraktalności [135–137], kolejnym krokiem była analiza multifraktalna tych sieci i odpowiedź na pytanie czy różnice morfologiczne między pasmami górkimi mogą pojawiać się w sieciach topograficznych na poziomie wieloskalowym. Algorytmem powszechnie stosowanym w multifraktalnej analizie sieci złożonych jest algorytm piaskownicy (sand-box) [139]. Pierwszym krokiem w tej metodzie jest losowe wybranie węzła początkowego, który określa się jako centrum piaskownicy. Piaskownica ma zmienny promień r , w ramach którego zlicza się węzły n , które mieszczą się w piaskownicy dla określonej wartości r (nie jest to geometryczna wartość, liczenia dokonuje się po krawędziach). Losowanie powtarza się dla dostatecznie dużej liczby różnych węzłów centralnych. Uogólniony wymiar fraktalny D_q z parametrem Rényi $q \in \mathcal{R}$ można uzyskać empirycznie, stosując następujący wzór:

$$D_q = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln \langle [n(r)/N]^{q-1} \rangle}{(q-1) \ln(r/d)}, \quad (7)$$

gdzie N to całkowita liczba węzłów w sieci a d to średnica sieci, która pełni tu rolę stałej normalizacyjnej. Jeżeli wyniki na to pozwalają wymiar D_q można oszacować za pomocą regresji liniowej $\ln \langle [n(r)]^{q-1} \rangle$ w funkcji $(q-1) \ln(r/d)$. Badana sieć jest multifraktalna jeśli nachylenie linii regresji maleje wraz ze wzrostem q , natomiast brak takiego zachowania sugeruje strukturę monofraktalną. Powyższy algorytm został zastosowany do sieci topograficznych a wyniki zilustrowano na Rys.12.



Rysunek 12: Uogólnione wymiary fraktalne D_q obliczone dla sieci topograficznych odpowiadających danemu pasmu górskiemu metodą sand-box (czarne kółka) oraz wymiar fraktalny d_f obliczony dla tych samych sieci metodą box-covering (szare kwadraty). Słupki błędów oznaczają odchylenie standardowe uzyskane po 10 niezależnych realizacjach.

Zakres zmienności wartości D_q dla $-10 \leq q \leq 10$ wynosi $|\Delta D_q| \leq 0,1$, co w zasadzie może wskazywać na słabą multifraktalność. Jednak nasze doświadczenie z analizą multifraktalną (m.in. prace K[1], K[2]) sugeruje, że tak małą różnicę można w całości przypisać efektom o skończonych rozmiarach. Zatem sieci topograficzne można uznać za monofraktalne. Wniosek ten potwierdza także fakt, że zależność D_q nie jest monotoniczna. Ponieważ takie zachowanie nie jest teoretycznie możliwe, jego istnienie wynika wyłącznie ze statystycznej niepewności wyników. Zatem, ponieważ wpływ efektów o skończonych rozmiarach jest tej samej wielkości co ΔD_q , hipoteza monofraktalności jest bardziej odpowiednia i konsystentna z wynikami niż hipoteza słabej multifraktalności.

Podsumowując wszystkie powyższe wyniki są podobne dla wszystkich rozpatrywanych pasm górskich, niezależnie od ich położenia, wysokości, powierzchni, wieku i morfologii, co niesie wręcz znamiona uniwersalności. Ta obserwacja jest

raczej sprzeczna z intuicją, jeśli weźmie się pod uwagę topografię takich pasm, jak Alpy i Appalachy. Te pierwsze składają się głównie z dendrytycznych systemów grani i dolin, drugie zaś w dużej części mają postać długich, naprzemiennych grzbietów i dolin o kratowej strukturze. Pomimo tak dużej zmienności strukturalnej, sieci topograficznych dla różnych zakresów nie da się rozróżnić nawet metodą multifraktalną. Wydaje się, że źródła tej strukturalnej uniwersalności można upatrywać w powszechności procesów kształtowania gór, takich jak erozja wodna oraz w uniwersalnych właściwościach skał, z których zbudowane są góry, które wyznaczają granice możliwych zboczy, odległości między sąsiednimi grzbietami i długości grzbietów. W tym kontekście należy podkreślić, że rzeczywiste procesy powstawania grani są znacznie bardziej skomplikowane niż znane mechanizmy konstrukcji sieci fraktalnych. Nasze wyniki otwierają przestrzeń i wskazują na potrzebę wprowadzenia nowej klasy modeli sieci złożonych, które będą w stanie odtwarzać struktury i własności m.in. grani górskich. Takie modele mogą rzucić nowe światło na powstawanie i ewolucję górskich struktur i będą również interesujące z punktu widzenia teorii grafów.

[K9] R. Rak, E. Rak, *The Fractional Preferential Attachment Scale-Free Network Model*, Entropy, 22(5), 509 (2020).

Mój wkład w powstanie artykułu [K9] to: przygotowanie warsztatu algorytmiczno – obliczeniowego, wykonanie obliczeń teoretycznych i numerycznych, udział w analizie i interpretacji wyników, udział w tworzeniu formy i redagowaniu artykułu.

Multidyscyplinarne badania trzech ostatnich dekad wykazały, że sieci złożone są często obecne w różnych złożonych systemach przyrody i społeczeństwa. Początki modelowania matematyczno-fizycznego sieci sięgają końca lat pięćdziesiątych XX wieku, kiedy Erdős i Rényi zapoczątkowali dziedzinę grafów losowych [140], a naukowcy zaczęli ją rozwijać. Matematycznie sieć jest reprezentacją rzeczywistego systemu i jest definiowana jako zbiór węzłów (wierzchołków) i połączeń (krawędzi) międzywęzłowych. Sieci złożone w naturalny sposób stały się wygodnym narzędziem do badania systemów złożonych, w których obserwuje się wiele elementów (węzłów) powiązanych ze sobą interakcjami (krawędziami). Najprostszą i jedną z najważniejszych cech pojedynczego węzła w sieci jest jego stopień ($k=0,1,2,3,\dots,N$). Fluktuacje wartości stopni węzłów w sieci można scharakteryzować m.in. rozkładem $p(k)$, który określa prawdopodobieństwo, że losowo wybrany węzeł będzie miał stopień(krotność) k . Sieci, których rozkład prawdopodobieństwa krotności węzłów spełnia prawo potęgowe typu:

$$p(k) = Ck^{-\gamma}$$

nazywane są „sieciami bezskalowymi”. Ten rodzaj sieci zidentyfikowano m.in. w takich systemach jak: Internet [141–143] i www [144–146]; systemy społeczne: [147], sieć pokarmowa [148], sieć ludzkich kontaktów seksualnych [149], język [150], sieć aktorów [151], sieci współpracy naukowej [152–154]; systemy biologiczne: komórka (sieć połączeń reakcji chemicznych), sieci białkowe [155, 156]. Dostrzeżono je również na poziomie struktur grani górskich omówionych w pracy [K8]. Rozkłady potęgowe są bardziej ogólne niż wykładnicze [157] ponieważ nie mają charakterystycznej skali i pozwalają na istnienie węzłów o dużych krotnościach (habów). Jak podano w Tabeli 1 w [158, 159], wartości liczbowe wykładnika γ dla różnych systemów są różne i zależą od szczegółów struktury sieci, ale większość z nich ma wartości γ od 2 do 3 (lub od 1 do 2 w przypadku skumulowanego rozkładu $P(k)$). Wyniki badań sieci rzeczywistych wykazały, że w porównaniu z losowymi grafami [157, 160] o tej samej wielkości i tym samym średnim stopniu węzłów, średnia długość drogi w sieci bezskalowej jest nieco mniejsza, niemniej jednak współczynnik grupowania jest znacznie wyższy. Oznacza to, że w sieciach bezskalowych istnieje stosunkowo niewiele węzłów o dużym stopniu, które odgrywają kluczową rolę w ’szybkości’ połączeń międzywęzłowych. Sieci rzeczywiste są otwarte i dynamicznie kształtowane poprzez ciągłe dodawanie do sieci nowych węzłów. Modele sieci

prezentowane w literaturze są często statyczne w tym sensie, że chociaż krawędzie/węzły można dodawać lub zmieniać, liczba węzłów jest ściśle określana w trakcie procesu formowania.

Preferencyjne dołączanie węzłów jest ogólnie rozumiane jako mechanizm, w którym nowo przybyłe węzły mają tendencję do łączenia się z węzłami o dużej krotności [153]. Koncepcja preferencyjnego przyłączania węzłów spotkała się z dużym zainteresowaniem w świecie nauki. Mechanizm wzrostu sieci oraz mechanizm preferencyjnego dołączania węzłów jest podstawą modelu BA zaproponowanego w [161]. W modelu tym stopień każdego nowego węzła wynosi m . Jednak bezskalowe sieci generowane przez ten model mają dwie własności, które często różnią się od właściwości wielu sieci rzeczywistych. Pierwszy z nich związany jest z przyjętym schematem uporządkowania węzłów, w którym dany węzeł-rodzic (R) ma często taką samą lub większą liczbę rozgałęzień niż którykolwiek z jego sąsiadów ($R + 1$). Oznacza to oczywiście, że stopnie odpowiednich węzłów pozostają w tej samej relacji: $k^{(R)} \geq k^{(R+1)}$. Zależność ta może jednak nie obowiązywać w sieci utworzonej według modelu BA – w tym modelu węzły nadrzędne definiujemy jako starsze w każdej parze węzłów połączonych. Taką sytuację można zaobserwować, jeśli istnieje węzeł o mniejszej krotności niż krotności jego sąsiadów.

Druga różnica polega na tym, że model BA tworzy sieci z wykładnikiem skalowania rozkładu skumulowanego CDF ($\beta = \gamma - 1$) $\beta = 2$, natomiast w przypadku sieci rzeczywistych często $\beta \neq 2$. Najczęściej używane modele, które są w stanie symulować wzrost sieci bezskalowych z $\beta < 2$, jak model Dorogovtseva-Mendes-Samukhina [162], wymagają istnienia cykli. Dlatego proponujemy inne podejście.

W pracy [K9] proponujemy uogólnienie modelu BA poprzez dodanie parametru f , który pozwala na generowanie sieci bezskalowych z dowolnym parametrem skalowania $1 < \beta \leq 2$. Modele sieciowe opisane w literaturze zakładają, że w procesie tworzenia sieci „widziane” są wszystkie węzły znajdujące się wcześniej w sieci. Proponujemy model, w którym mechanizm preferencyjnego dołączenia kolejnego węzła nie uwzględnia wszystkich istniejących węzłów, a jedynie ich część. W ten sposób, w sensie globalnym, osłabiono zasadę liniowego, preferencyjnego dołączania kolejnych węzłów.

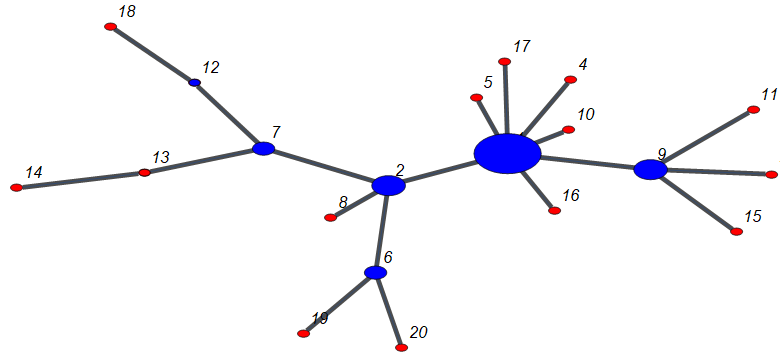
W celu uzyskania lepszej zgodności z sieciami empirycznymi wprowadzono dwie modyfikacje do pierwotnego algorytmu BA. W każdym kolejnym kroku nowy węzeł j jest łączony z już istniejącą siecią pojedynczą krawędzią ($m = 1$), której przeciwny koniec należy dołączyć do jakiegoś kandydującego węzła i wybranego z prawdopodobieństwem proporcjonalnym do stopnia tego węzła k_i . Jednakże, zanim nastąpi połączenie, porównujemy stopnie k_i i $k_{p(i)}$, gdzie $p(i)$ oznacza węzeł nadrzędny węzła kandydującego i . Jeśli $k_i \leq k_{p(i)}$ następuje połączenie pomiędzy i i j . W przeciwnym razie mamy połączenie j z $p(i)$ i $p(i) = p(j)$.

Druga modyfikacja polega na ograniczeniu zbioru istniejących węzłów, do któ-

rych można podłączyć nowy węzeł j . Odbywa się to poprzez uporządkowanie węzłów sieci $j - 1$ według ich stopnia (od najwyższego do najniższego) i wybranie tylko podzbioru $\mathcal{F}$ z węzłów n_{j-1} należących do $f = n_{j-1}/(j - 1)$ ($0 < f \leq 1$). Jeżeli dwa lub więcej węzłów ma ten sam stopień, porządkujemy je według kolejności R (najpierw niższe R), a w przypadku tych samych R kolejność takich węzłów jest losowa. Dla $f = 1$ uwzględniane są wszystkie istniejące węzły jak w modelu BA. Jeśli $f < 1$, preferencyjny mechanizm przyłączania jest ograniczony do podzbioru $\mathcal{F}$, gdzie nie wszystkie węzły są kandydatami, do których może dołączyć inny węzeł - jeśli f maleje, liczba kandydatów również maleje. Prawdopodobieństwo P wylosowania węzła i jest określone przez

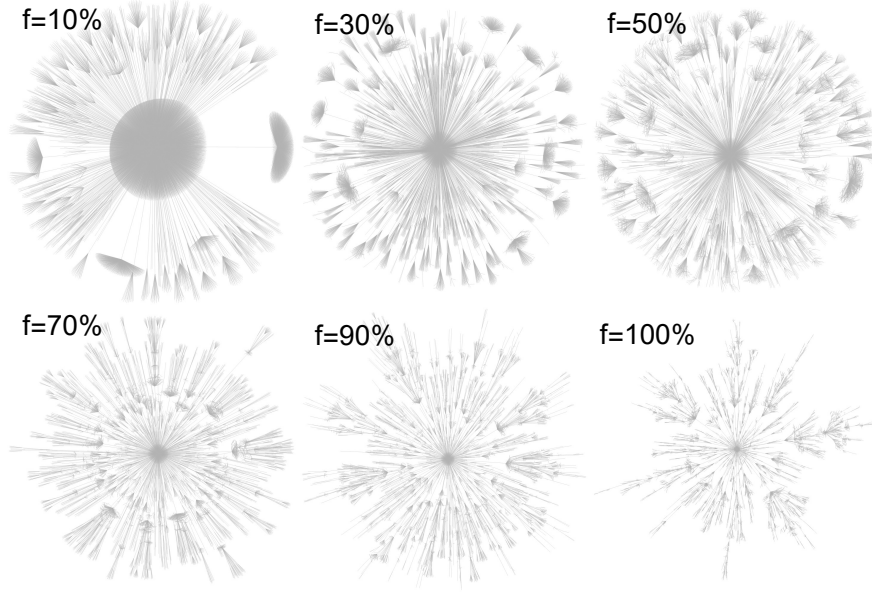
$$P(i) = \frac{k_i}{\sum_{s=1}^{n_{j-1}} k_s}. \quad (8)$$

Rys.13 przedstawia przykładową sieć z wyróżnionymi węzłami należącymi do podzbioru $\mathcal{F}$. Ponieważ przyjęto $m = 1$, więc jest to sieć acykliczna i typu 'drzewo'. Model ten nazwano "Bezskalowy model sieci z ułamkowym preferencyjnym przyłączaniem węzłów" - ("The Fractional Preferential Attachment" - 'FPA').



Rysunek 13: Przykład sieci tworzonej według modelu FPA. Na niebiesko zaznaczono $30\% \equiv f = 0.3$ najbardziej krotnych węzłów, które w kolejnym kroku są uwzględniane w preferencyjnym przyłączeniu. Pozostałe węzły (czerwone) nie są uwzględniane.

Wizualizacja sieci generowanych przez model FPA została przedstawiona na Rys.14. Pokazano tam przykłady sieci dla sześciu różnych parametrów $0 < f \leq 1$. Każda sieć składa się z $N = 40,000$ węzłów, gdzie w procesie generowania dołączany węzeł łączył się tylko z jednym węzłem w istniejącej sieci ($m = 1$) (sieci acykliczne).



Rysunek 14: Przykłady sieci generowanych przez bezskalowy model FPA dla różnych wartości parametru f . We wszystkich przypadkach $N = 40,000$ węzłów. Wszystkie sieci są acykliczne, tj. $m = 1$.

Kolejnym krokiem było zbadanie skumulowanych rozkładów prawdopodobieństwa krotności węzłów. Do tego użyto sieci o $N = 100,000$ węzłów. Okazało się, że sieci generowane za pomocą modelu FPA mają bezskalowy charakter rozkładu tj. $P(k) \sim k^{-\beta}$ z wykładnikiem β zależnym od f . Dla $f = 1$ wykładnik skalujący β przyjmuje maksymalną wartość $\beta \approx 2.0$ - wtedy FPA staje się BA. Zmniejszając parametr f , obserwujemy, że rozkład stopni $P(k)$ pozostaje nadal bezskalowy a β maleje aż do $\beta = 1.1$ dla $f = 0.1$. Oznacza to, że model FPA może generować sieci bezskalowe z dowolnym wykładnikiem z zakresu $1 < \beta \leq 2$ a tym samym odzwierciedlać parametry sieci, które dostrzerzono w naturze. Zachowanie modelu sprawdzono dla $m = 1$ (sieć acykliczna) oraz $m = \{2, 3, 5\}$ (sieci cykliczne). Okazuje się, że podobnie jak w klasycznym modelu BA, wartości wykładnika potęgowego β nie zmieniają się wraz ze zmianą parametru m . Ponadto wartość parametru skalowania β jest ściśle związana z f , tj. $\beta = f + 1$. W tabeli Tab.1 w pracy K[9] zestawiono wszystkie parametry topologiczne generowanych sieci: asortatywność sieci α , średni lokalny współczynnik klasteryzacji ϱ , średni stopień węzła $\langle k \rangle$, średnicę sieci D , średnią najkrótszą drogę L , maksymalny stopień węzła $k_{\max}$ oraz wykładnik skalujący rozkład prawdopodobieństwa krotności węzłów β .

Kolejnym elementem ilościowej analizy sieci generowanych przez model FPA była analiza fraktalna. W pracy [K9] pokazano, że sieci graniowe są bezskalowe (z

parametrem $1.6 \leq \beta \leq 1.7$) i nie mają fraktalnej natury. Czy sieci z innymi parametrami skalującymi mogą być fraktalne? Okazuje się, że nie. Pokazano, że sieci FPA nie są fraktalne. Zrodził się jednak pomysł, jak (być może) uzyskać sieci fraktalne (a nawet multifraktalne) i jednocześnie zachować ich bezskalowy charakter. W przedstawionym modelu FPA założono, że w procesie tworzenia sieci wartość parametru f jest stała (dla BA $f = 1$). Może to być powód, dla którego otrzymane sieci pozbawione są fraktalnej natury. Dlatego kolejnym etapem badań jest model FPA, w którym wartość f będzie się zmieniać w każdym kolejnym kroku dodawania nowego węzła. Można tu przyjąć różne warianty doboru wartości zbioru f np. próbki losowe o różnym rozkładzie prawdopodobieństwa (np. gaussowskim, trójkątnym, jednorodnym czy potęgowym) a także próbki o własnościach fraktalnych lub multifraktalnych (z długozasięgowymi korelacjami).

[K10] R. Rak, E. Rak, *Multifractality of complex networks is also due to geometry: a Geometric SandBox algorithm*, Entropy, 25(9), 1324 (2023).

Mój wkład w powstanie artykułu [K10] to: przygotowanie warsztatu algorytmiczno – obliczeniowego, wykonanie obliczeń teoretycznych i numerycznych, udział w analizie i interpretacji wyników, tworzenie koncepcji, formy i redagowanie artykułu.

Od zawsze, wyzwaniem dla świata nauki jest precyzyjny i pełny opis otaczającej nas rzeczywistości a więc także identyfikacja i charakterystyka systemów złożonych. Tu badania sieci stały się ważnym i nieodzownym elementem tego procesu. Jedną z ważniejszych cech sieci rzeczywistych, jest ich złożoność, która często objawia się własnościami fraktalnymi lub nawet multifraktalnymi.

Większość sieci rzeczywistych wykazuje ciekawe cechy topologiczne, a połączenia międzywęzłowe mają często złożony charakter. Badanie ich charakterystyk sprowadza się standardowo do analizy: assortatywności pomiędzy wierzchołkami, współczynnika gronowania, rozkładu krotności węzłów, wzajemności, centralności czy najkrótszych ścieżek. Wydaje się jednak, że użytecznym i obiecującym narzędziem identyfikacji możliwej złożoności struktury sieci jest analiza (multi-)fraktalna.

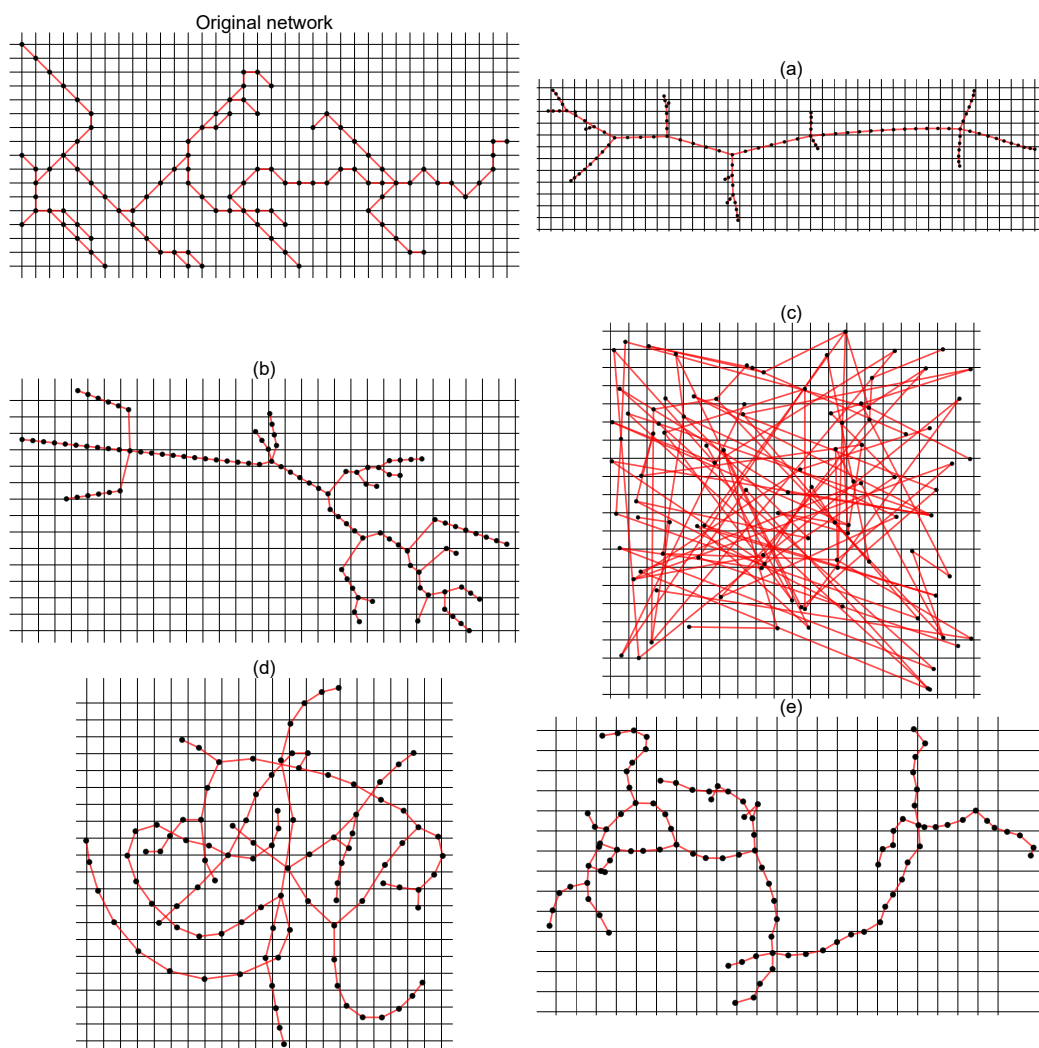
Ważnym osiągnięciem w dziedzinie fizyki był opis geometrii fraktalnej dokonany przez Mandelbrota [163]. Chociaż te piękne geometryczne struktury fraktalne odnoszą się do struktur w przestrzeni fizycznej, w sieciach zaobserwowano nowe formy fraktalności, które są wynikiem złożonych interakcji między węzłami. Współcześnie przyjmuje się, że fraktalność sieci jest wynikiem jej indywidualnych lub wypadkowych właściwości i mechanizmów, takich jak: samopodobieństwo, zjawisko wzrostu, zjawisko małego świata, bezskalowy charakter rozkładu krotności węzłów czy samoorganizacja [134, 161, 164–168].

Istnieje kilka metod analizy multifraktalnej sieci. Jednak wszystkie te metody uwzględniają jedynie fakt połączenia pomiędzy węzłami (i ewentualnie wagę

krawędzi), a nie uwzględniają rzeczywistego położenia (współrzędnych) węzłów w przestrzeni (geometrii). Intuicja podpowiada jednak, że geometria położenia węzłów sieci powinna mieć istotny wpływ na jej rzeczywistą strukturę fraktalną. Wiele sieci identyfikowanych w przyrodzie (np. sieci połączeń lotniczych, sieci energetycznych, sieci społecznościowych, sieci grani górskich, sieci neuronów w mózgu, sieci uliczne) posiada własną, często unikalną i charakterystyczną geometrię, która nie jest brana pod uwagę w procesie identyfikacji fraktalności w powszechnie stosowanych metodach.

W artykule zaproponowano metodę analizy sieci multifraktalnej, (wypadkowa dwóch innych znanych metod tj. 'box-counting' [169–171] i 'sand-box' (SB) [138, 139, 172–174]), która uwzględnia zarówno połączenia międzywęzłowe, jak i współrzędne lokalizacji węzłów (geometrię sieci). Przeanalizowano wyniki dla różnych wariantów geometrycznych tej samej sieci i pokazano, że metoda ta, w przeciwieństwie do metody powszechnie stosowanej, jest wrażliwa na zmiany geometrii sieci. Przeprowadzone testy powyższej metody obejmują zarówno sieci syntetyczne jak i sieci rzeczywiste.

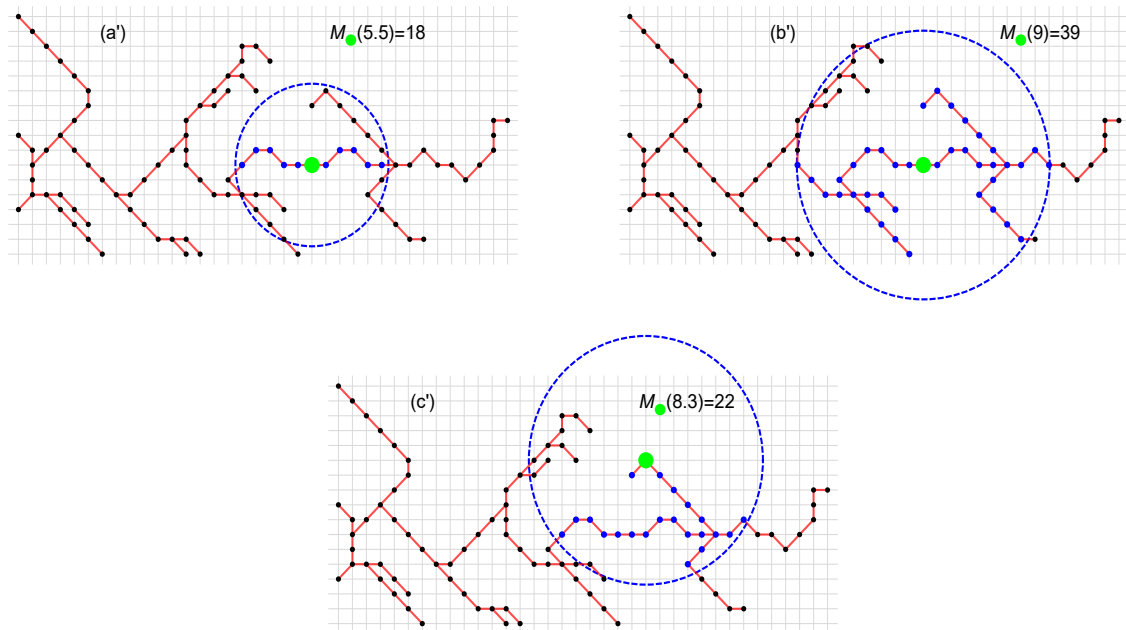
Główną koncepcję podejścia do fraktalności sieci oparto na spostrzeżeniu, które wizualizuje Rys.15. Pokazano na nim tę samą sieć w różnych reprezentacjach geometrycznych, gdzie węzły mają tę samą strukturę połączeń, ale są różnie rozmieszczone względem siebie na płaszczyźnie. Zmiana położenia węzłów powoduje zmianę długości krawędzi, ale nie zmienia stopnia węzła. Nie uwzględniając wag pomiędzy węzłami, z sieciowego punktu widzenia sieci te są identyczne – dla każdej z nich wynik standardowego algorytmu SB jest identyczny. Intuicja podpowiada jednak, że sieci te mogą (a nawet powinny mieć) różną charakterystykę złożoności. Oczywiście istnieje wersja algorytmu SB, która uwzględnia wagi połączeń pomiędzy węzłami, gdzie wagą może być np.: odległość między dwoma sąsiednimi węzłami. Jest to jednak uwzględnienie jedynie interakcji między najbliższymi sąsiadami przez co nie są brane pod uwagę bardziej globalne interakcje międzywęzłowe.



Rysunek 15: Ta sama sieć w różnych reprezentacjach geometrycznych, gdzie węzły mają tę samą krotność, ale są odmiennie rozmieszczone względem siebie na płaszczyźnie. W każdym przypadku zmieniają się jedynie współrzędne geometryczne położenia każdego węzła, a co za tym idzie długość krawędzi. W pracy K[10] na rysunku Fig.3 pokazano również alternatywne geometrie dla sieci rzeczywistej tj. dla rzek Amazonii.

Aby uwzględnić w analizie multifraktalnej zarówno położenie geometryczne węzłów jak i właściwości sieci, zaproponowano zmodyfikowany, geometryczny algorytm SB – the Geometric Sandbox algorithm (GSB). Kolejne kroki algorytmu GSB są następujące:

- (1) Rozważmy sieć Q . Wyznaczamy zbiór promieni okręgów R ($0 < R \leq P$) piaskownicy, gdzie P oznacza średnicę geometryczną (odległość pomiędzy najbardziej odległymi węzłami) sieci Q . W praktyce jednak wybieramy mniejszy R ($0 < R \leq P/5$). W przeciwieństwie do standardowego SB, tutaj promień R z reguły nie jest liczbą całkowitą (wyrażaną jako wielokrotność krawędzi), ale jest odległością geometryczną (liczbą rzeczywistą).
- (2) W sposób losowy wybieramy zbiór węzłów $C(R)$ będący środkami piaskownic.
- (3) Zliczamy liczbę węzłów $M_i(R)$ zawartych w piaskownicy z węzłem środkowym $i \in C(R)$ i promieniem R okręgu. Liczba $M_i(R)$ jest liczbą węzłów znajdujących się na obszarze koła i tworzących graf spójny, czyli w okręgu istnieje połączenie każdego węzła z węzłem centralnym i . Jest to kolejna modyfikacja standardowej metody SB. Licząc tylko węzły tworzące graf spójny z węzłem i mamy pewność, że nie uwzględnimy w obszarze koła o promieniu R węzłów, które nie oddziałują bezpośrednio z węzłem centralnym i (nie liczymy węzłów, z których po krawędziach nie możemy dotrzeć do węzła i). Takie podejście do liczenia węzłów jest konwolucją klasycznego SB i metody pudełkowej (box-covering): liczymy węzły z danego pudełka (tutaj koła, ale może to być też inna figura płaska), ale tylko te, które mają połączenie sieciowe z węzłem $C(R)$. Proces ten dla $R = \{5.5, 9, 8.3\}$ zilustrowano na Rys.16. Węzły, które wchodzą w skład liczby $M(R)$ zaznaczono kolorem niebieskim.



Rysunek 16: Przykład zliczania węzłów sieci w metodzie GSB dla kół o trzech różnych promieniach R . Przykłady (a') i (b') dotyczą promieni $R = \{5.5, 9\}$ dla tego samego węzła centralnego. Przykład (c') pokazuje zliczanie węzłów dla innego węzła centralnego i promienia $R = 8.3$.

Kolejne kroki są identyczne jak w klasycznej metodzie SB:

- (4) Dla każdego parametru skalowania $q \neq 1$ wyznaczamy średnią $\langle [M_i(R)]^{q-1} \rangle$ dla wszystkich piaskownic o promieniu R .
- (5) Kroki (2)–(4) powtarzamy dla ustalonego wcześniej zbioru promieni $1 \leq R \leq P$.
- (6) Jeżeli obserwujemy liniową zależność pomiędzy $\ln(\langle [M_i(R)]^{q-1} \rangle)/(q-1)$ a $\ln(R/P)$ to możemy mówić o (multi-)fraktalnym charakterze badanej sieci

Q i obliczyć wiarygodny uogólniony wymiar fraktalny D_q oraz widmo osobliwości $f(\alpha)$ w następujący sposób:

$$D_q = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\ln \langle [M_i(R)]^{q-1} \rangle}{\ln(R/P)} \frac{1}{q-1}, \quad q \in \mathbb{R}, \quad q \neq 1, \quad (9)$$

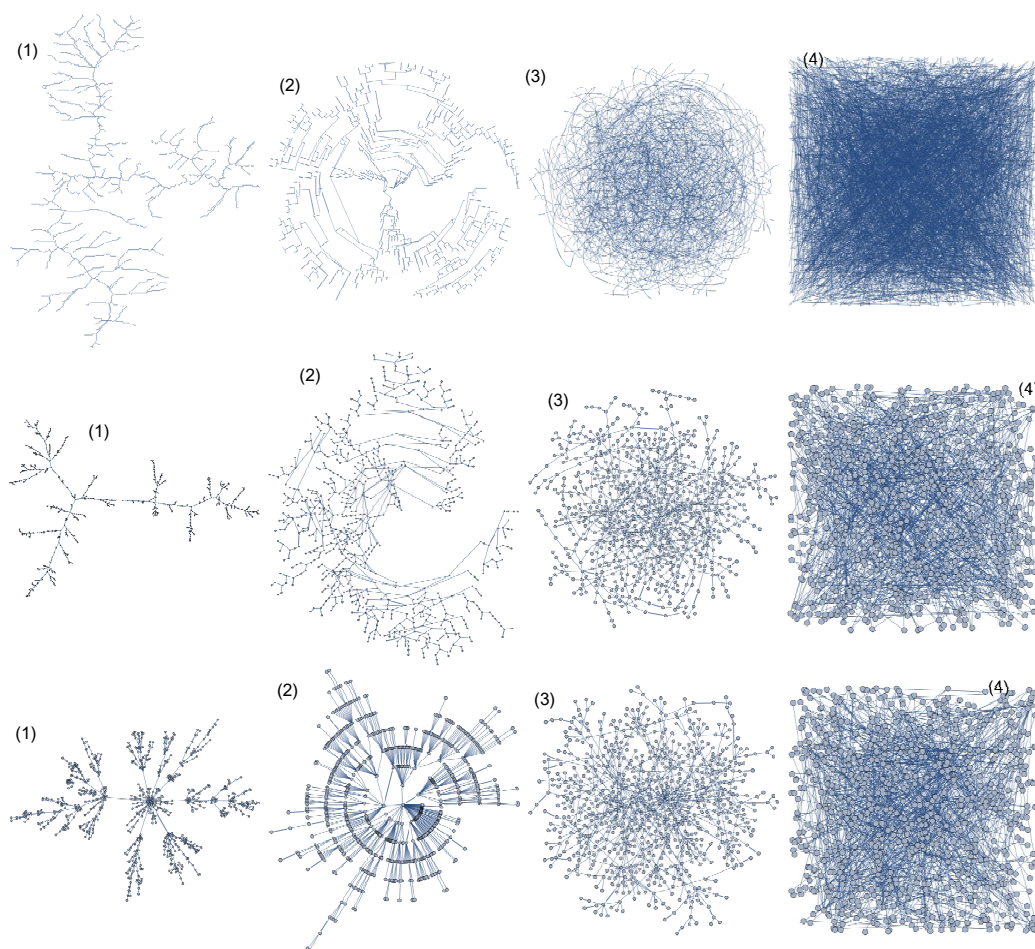
$$\tau_q = (q-1)D_q; \quad \alpha = \frac{d}{dq}\tau_q \quad \text{and} \quad f(\alpha) = q\alpha - \tau_q, \quad (10)$$

gdzie α jest wykładnikiem osobliwości (Hölder'a). Bogactwo ewentualnej multifraktalności występującej w analizowanej sieci Q można scharakteryzować ilościowo zarówno jako rozproszenie uogólnionego wymiaru fraktalnego D_q : $\Delta D_q = D_{q_{min}} - D_{q_{max}}$ lub jako szerokość widma multifraktalnego $f(\alpha)$: $\Delta \alpha = \alpha_{max}(q_{min}) - \alpha_{min}(q_{max})$, gdzie q_{min} i q_{max} są odpowiednio minimalną i maksymalną wartością parametru odkształcenia q .

Aby przetestować ewentualny wpływ geometrycznego położenia węzłów w sieci, rozważono trzy rodzaje sieci: rzeczywistą sieć grani gór Liguryjskich (w ujęciu topograficznym), sieć typu drzewo oraz sieć bezskalową. Dla każdego typu sieci przeprowadzono analizę multifraktalną dla 4 alternatywnych geometrii tej samej sieci. Należy podkreślić, że zmiany geometrii nie powodują zmiany stopnia węzłów, zatem klasyczna metoda SB, niezależnie od geometrii (wyglądu) sieci, daje ten sam wynik. Istniejący, ważony wariant klasycznej metody SB, który może uwzględniać odległości pomiędzy węzłami ale w przeciwieństwie do proponowanej tu metody GSB nie uwzględnia on względnych położenia wszystkich węzłów. Alternatywne geometrie sieci wykonano w programie Mathematica (wykorzystano do tego pakiet „GraphM”). Przykład pokazano na Rys.17, gdzie zilustrowano 4 różne warianty geometryczne odpowiednio dla sieci grani gór Liguryjskich, sieci typu drzewiastego i sieci bezskalowej. Dla lepszej przejrzystości grafów znacznie zmniejszono liczbę węzłów, co w przypadku grani górskich oznacza, że pokazana została jedynie część pasma górskiego.

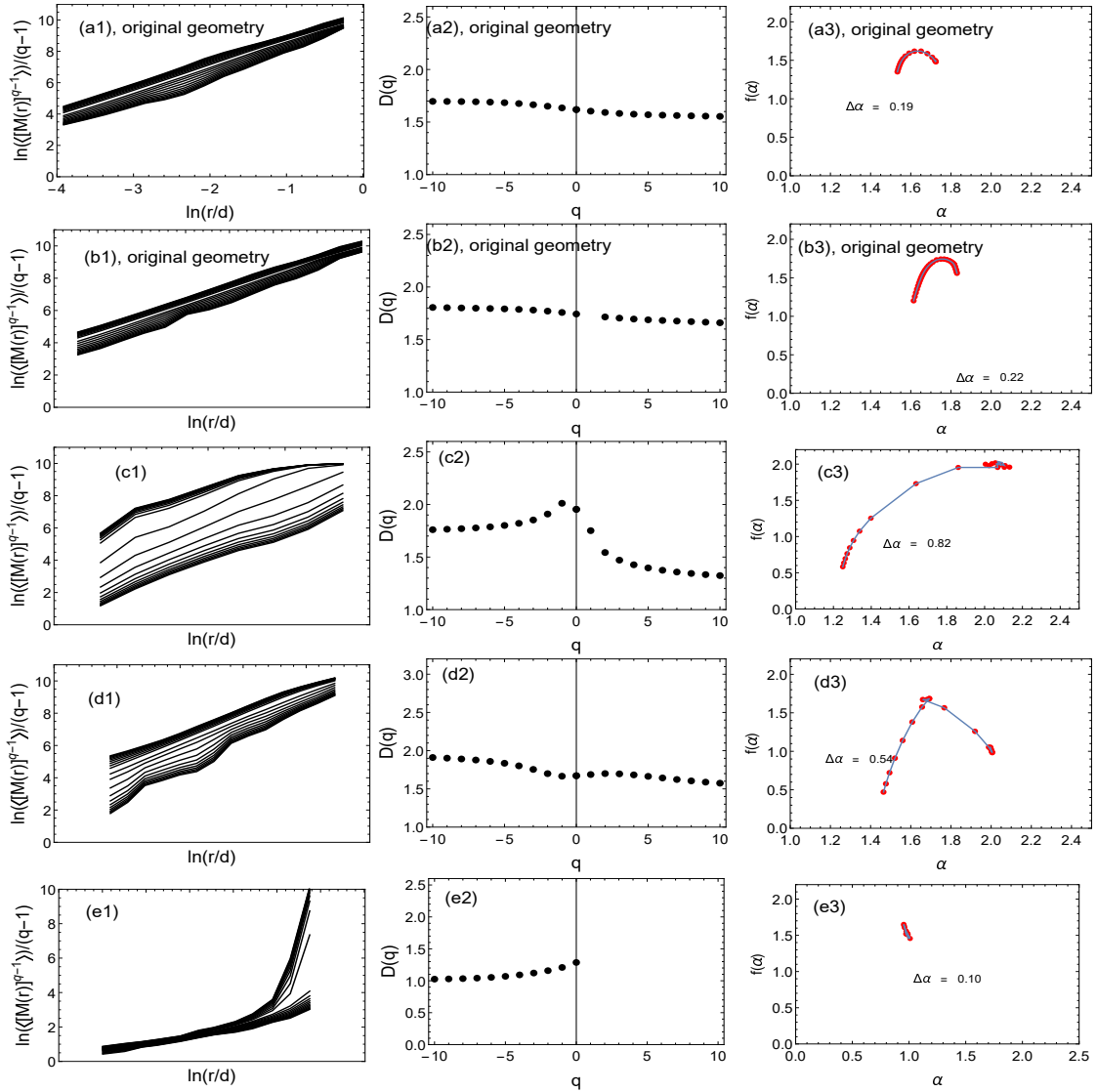
Rys.18, Rys.19, Rys.20 przedstawiają wyniki analizy multifraktalnej z wykorzystaniem klasycznej metody SB i metody GSB. Dla sieci drzewiastej (rys.19) i sieci bezskalowej (rys.20) rozmiar sieci jest taki sam i wynosi 40000 węzłów. Dostosowano się tu liczby węzłów rzeczywistej sieci grani górskich (40396 węzłów) (rys.18). Wyniki dla wygenerowanych (syntetycznych) sieci tj. drzewiastych i bezskalowych uśredniono po 10 niezależnych realizacjach.

Zastosowano następujące oznaczenia: a) to wyniki dla metody SB; (b, c, d, e) to wyniki dla GSB. W przypadku (a) i (b) analizowana jest sieć o tej samej geometrii. Dla łatwiejszego porównania wyników wykresy przedstawiono w tym samym zakresie liczbowym. Dla każdej sieci w pierwszej kolejności wyznaczono funkcję fluktuacji ($\langle [M(R)]^{(q-1)} \rangle / (q-1) \rangle \equiv F$ (wykresy z indeksem (1)) . Następnie, jeśli



Rysunek 17: Cztery warianty geometrii (1–4) dla trzech typów sieci: na górze - topograficzna sieć grani gór Liguryjskich; środkowy - sieć typu drzewo; dolny - sieć bezskalowa. Zmiana geometrii polega na zmianie położenia węzłów na płaszczyźnie i nie zmienia krotności węzłów. W celu lepszej wizualizacji pokazano sieci z małą liczbą węzłów.

funkcja fluktuacji F na skali log-log jest linią prostą, wyznaczamy wymiar fraktalny D_q i widmo osobliwości $f(\alpha)$ (wykresy z indeksem (2) i (3)). Zarówno w przypadku sieci rzeczywistej jak i pozostałych dwóch sieci syntetycznych można jednoznacznie stwierdzić, że zmiana geometrii sieci zmienia jej właściwości multifraktalne. W czterech przypadkach nie stwierdzono fraktalnej natury sieci, ponieważ funkcja fluktuacji F nie skalowała się w pełnym zakresie wartości q (Rys.18e) lub nie było skalowania w całym zakresie q (Rys.19e, Rys.20a, Rys.20e). Dlatego też, w tych przypadkach nie było zasadne wyznaczanie kolejnych charakterystyk multifraktalnych. Brak fraktalnej natury sieci bezskalowych, w kontekście metody SB,

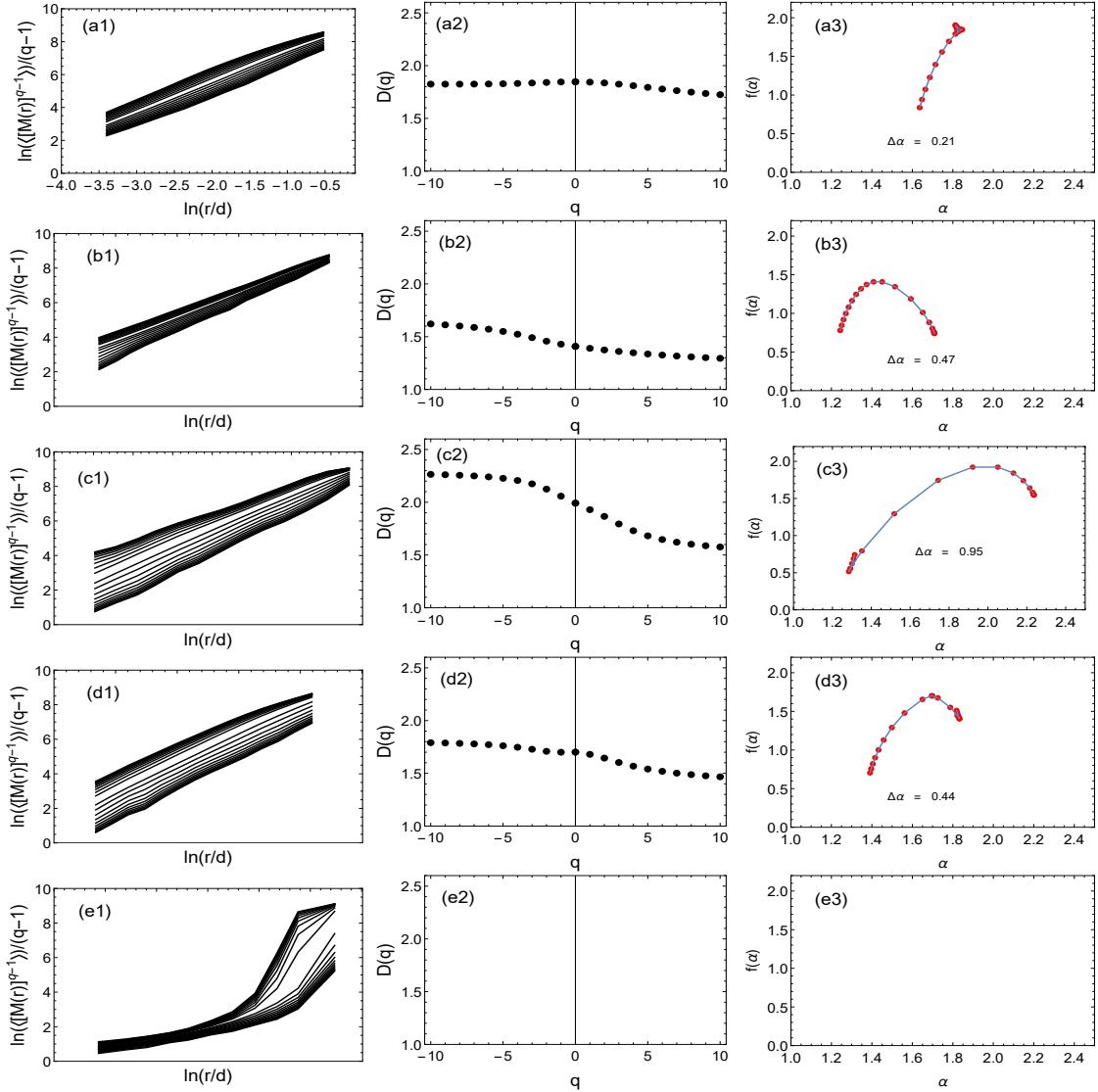


Rysunek 18: Analiza multifraktalna rzeczywistej sieci grani gór Liguryjskich z wykorzystaniem klasycznego algorytmu SB (a1, a2, a3) oraz jego modyfikacji tj. GSB (pozostałe wykresy). Pierwsze dwa wiersze to wyniki dla oryginalnej sieci rzeczywistej; wiersze (c, d i e) to wyniki dla alternatywnych geometrii. Kolumny (1), (2), (3) pokazują odpowiednio funkcje fluktuacji, wymiar fraktalny i widmo multifraktalne.

diskutowano w pracach K[8] oraz K[9].

Algorytm SB dla reprezentacji topograficznej sieci grani górskich wskazuje na multifraktalny charakter sieci (Rys.18 a1,a2,a3), gdzie szerokość widma multifraktalnego $\Delta\alpha = 0,19$. Efekt ten dostrzeżono także w pracy K[8]. Rys.18 (b1,b2,b3)

przedstawia wyniki dla metody GSB dla oryginalnej geometrii sieci, która jest geometrycznie podobna do Rys.17(1) dlatego uwzględnienie geometrii nie wpłynęło znacząco na charakterystykę fraktalną ($\Delta\alpha = 0.22$). Obserwujemy jedynie niewielkie przesunięcie całego widma w prawo. Kolejne trzy wiersze wykresów na Rys.18 przedstawiają wyniki algorytmu GSB dla 3 różnych geometrii (pierwszy wiersz na Rys.17 ((2),(3),(4))). Można zauważyć, że zmiana rzeczywistej geometrii sieci grani pociąga za sobą zmianę charakterystyk multifraktalnych, a najszersze spektrum obserwuje się dla przypadków (c) i (d). W przypadku (e) wymiar fraktalny D_q i widmo multifraktalne $f(\alpha)$ pokazano tylko dla $q < 0$, gdyż tylko dla nich obserwuje się skalowanie w pełnym zakresie skal. Ponadto dla tego typu geometrii (analog z Rys.17(4)), gdzie węzły są rozmieszczone losowo, widoczne jest przesunięcie całego widma w stronę $\alpha = 1$, co sugeruje deprecjację złożoności sieci, a elementy o monofraktalnym charakterze można dostrzec jedynie dla $q < 0$.

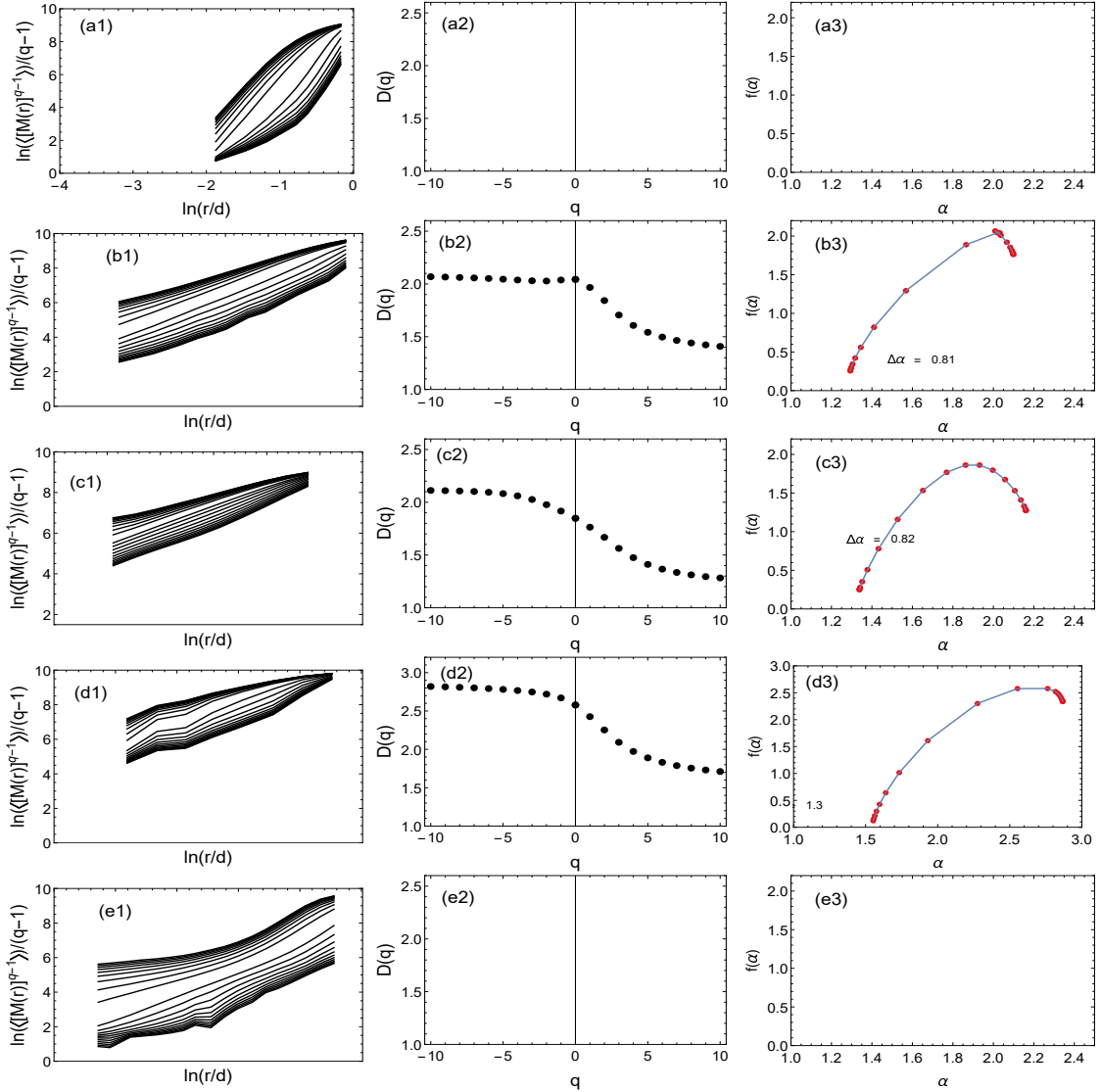


Rysunek 19: Analiza multifraktalna syntetycznej sieci typu drzewo z wykorzystaniem klasycznego algorytmu SB (a1, a2, a3) oraz jego modyfikacji tj. GSB (pozostałe wykresy). W wierszach pokazano wyniki dla alternatywnych geometrii sieci. Kolumny (1), (2), (3) pokazują odpowiednio funkcje fluktuacji, wymiar fraktalny i widmo multifraktalne. Wyniki uśredniono po 10 niezależnych realizacjach.

Rys.19(a–e) stanowi zestawienie wyników dla syntetycznej sieci drzewiastej dla reprezentacji geometrycznych, jak na Rys.17 (środkowy wiersz 1–4). Wyniki reprezentacji (1) pokazano w a1,a2 a3 (SB) i b1,b2,b3 (GSB). Należy zauważyć, że przykład (1) jest jakościowo podobny do rzeczywistej geometrii grani górskich dlatego

wyniki są podobne do wyników dla oryginalnej geometrii sieci grani. Dla geometrii (2) i (3) widać także wpływ geometrii na fraktalną naturę sieci (Rys.19(c,d)). Dla geometrii (2) widmo jest najszersze i najbardziej przesunięte w prawo. W przypadku (e), dla geometrii (4), gdzie węzły rozmieszczone są losowo, podobnie jak w sieci rzeczywistej, obserwujemy brak skalowania funkcji fluktuacji. Elementy skalowania można dostrzec tylko w krótkim zakresie małych wartości R . Dlatego nie podjęto próby oszacowania D_q i $f(\alpha)$, twierdząc tym samym, że tego typu sieć o takiej geometrii nie jest fraktalna.

Rys.20(a–e) przedstawia wyniki analizy fraktalnej dla syntetycznej sieci bezskalowej typu Barabasi-Albert. Jak pokazano m.in. w pracy K[8] również i tu klasyczna metoda SB pokazuje brak fraktalności (Rys.20 (a)) - funkcja fluktuacji nie skaluje się, więc wymiar fraktalny D_q oraz widmo multifraktalne $f(\alpha)$ nie istnieją. Jeśli jednak zastosujemy metodę GSB uwzględniając geometrię sieci, pojawia się fraktalność, która podobnie jak w poprzednich przykładach jest zależna od rodzaju geometrii (Rys.20 (b–d)). W przypadkach (b,c,d) funkcja fluktuacji F jest wykładnicza w całym zakresie R , a widma multifraktalne są stosunkowo szerokie ($\Delta\alpha$ przyjmuje wartości 0,81, 0,82, 1,3). Znacznie wyższe od zera wartości $\Delta\alpha$ świadczą o złożonej naturze tych sieci. Dla geometrii (e), w której węzły są rozmieszczone losowo (w sensie geometrycznym), podobnie jak w przypadku omawianych wcześniej typów sieci, funkcja fluktuacji nie jest typu potęgowego, dlatego obliczanie innych charakterystyk fraktalnych nie jest zasadne.



Rysunek 20: Analiza multifrakalna syntetycznej sieci bezskalowej z wykorzystaniem klasycznego algorytmu SB (a1, a2, a3) oraz jego modyfikacji tj. GSB (pozostałe wykresy). W wierszach pokazano wyniki dla alternatywnych geometrii sieci. Kolumny (1), (2), (3) pokazują odpowiednio funkcje fluktuacji, wymiar fraktalny i widmo multifrakalne. Wyniki uśredniono po 10 niezależnych realizacjach.

Podsumowując, testy metody GSB potwierdzają, że złożoność sieci (jej charakterystyki fraktalne) jest wrażliwa na zmiany jej geometrii. Wykazano, że sieci o 'przyjemnej' dla ludzkiego oka geometrii mają stosunkowo szerokie widma multifrakalne w przeciwieństwie do sieci, w których węzły są losowo rozmieszczone i nie

są fraktalne. Wydaje się zatem, że zaproponowana metoda może być użytecznym narzędziem do identyfikacji i badania degeneracji sieciowych struktur multifrakalnych nie tylko w przypadku sieci 2D, ale także 3D, gdzie geometria często odgrywa ważną rolę np. detekcja zmian w sieciowych strukturach DNA lub w sieciach neuronowych mózgu.

2.3.3 Podsumowanie

Od czasu gdy ludzie próbują poznawać i zrozumieć otaczającą ich rzeczywistość powstało wiele praw, teorii, metod i narzędzi, które na gruncie ilościowym potrafią wyjaśnić wiele zjawisk fizycznych ewoluujących w czasie i/lub przestrzeni. Otaczającą nas rzeczywistość nauczyliśmy się opisywać za pomocą liczb. Obecny poziom rozwoju techniki pozwala na rejestrowanie i magazynowanie ogromnych ilości danych liczbowych, które w sposób komplementarny opisują dany system ale go nie tłumaczą. Analiza tego typu danych, której efektem z założenia jest zrozumienie przeszłych ale także zamodelowanie przyszłych stanów zachowań danego systemu, była wiodącym elementem treści niniejszego autoreferatu. Podstawowymi, a zarazem najciekawszymi cechami systemów obserwowanych w przyrodzie, które często ze sobą współlegzystują jest ich złożoność a w szczególności (multi-) fraktalność. Charakter złożoności szeregów czasowych generowanych przez procesy naturalne zwykle jest bardzo skomplikowany a konwencjonalne narzędzia analizy ilościowej nie są w stanie uchwycić efektów będących wynikiem interakcji na wielu skalach. Dlatego koncepcja multifraktalności skłoniła do budowania formalnych narzędzi, które identyfikują i interpretują wiele istotnych cech charakteryzujących złożoność danego systemu.

Celem moich dotychczasowych badań, których efektem jest m.in. prezentowany tu cykl dziesięciu publikacji, było zarówno udoskonalanie sieciowych i wieloskalowych metod analizy jak i szeroko rozumiana analiza multifraktalna i sieciowa wybranych systemów złożonych. Najważniejsze wyniki to:

- Zidentyfikowano i udowodniono, że wiodący wpływ na poziom prawdziwej multifraktalności (a więc i złożoności) finansowych serii czasowych mają korelacje nieliniowe a w znacznie mniejszym stopniu grube ogony rozkładów prawdopodobieństwa czy efekt skończonej długości danych.
- Pokazano, m.in. że asymetria rozkładów fluktuacji ma wpływ na efekty multifraktalne wyłącznie w obszarze Levy'ego, gdzie obserwuje się znacznie wolniejszy wzrost $\alpha_{max} \sim \beta^{-\gamma}$ dla rozkładów asymetrycznych – wartość $\gamma = 0.37$, podczas gdy dla rozkładów symetrycznych $\gamma = 1$. Mniejsza wartość wykładnika γ wskazuje, że rozkład asymetryczny znacząco zmniejsza multifraktalny charakter analizowanych danych. Kiedy β maleje (ogon rozkładu

staje się grubszy) przesunięcie widma multifraktałnego $f(\alpha)$ w prawo jest wolniejsze niż w przypadku symetrycznym.

- Wykazano, że fałszywe efekty multifraktałne dla ustalonego rodzaju rozkładów mogą być dobrze opisane ilościowo przez prawo potęgowe $\Delta h_{FT} = C(\beta)q^\mu$ z parametrem deformacji multifraktałnej q i parametrem grubości ogona β . Relacja ta jest dobrze spełniona w zakresie $-5 \leq q \leq 5$ często używanym przez wielu autorów badających zjawiska multifraktałne w empirycznych szeregach czasowych.
- Analiza finansowych danych rzeczywistych wskazała, że efekt grubych ogonów rozkładu prawdopodobieństwa ma znacznie większy wpływ na pozorną multifraktałność niż efekt skończonej długości danych czy efekt wywołany przez liniowe korelacje związane z serią.
- Silniejsze efekty nieliniowe zaobserwowano nie dla amerykańskiego indeksu DJIA lecz dla polskiego indeksu WIG20, szczególnie dla dłuższych skal czasowych tj. $\Delta t = 5\text{min}$ i 10min . Może to być spowodowane tym, że polski rynek akcji jest znacznie mniejszy i młodszy od amerykańskiego co powoduje iż na polskim rynku giełdowym jest znacznie mniej transakcji w danej jednostce czasu - czas transakcji wydaje się być relatywnie wolniejszy.
- Pokazano, iż dla rzeczywistych danych finansowych najsilniejsze multifraktałne korelacje wzajemne istnieją pomiędzy liczbą transakcji a wolumenem obrotu, podczas gdy najsłabsze istnieją (lub nawet nie istnieją) pomiędzy stopami zwrotu a pozostałymi wielkościami. Obserwacja ta potwierdziła założenia modelu, który zakłada, że duże wartości wolumenu obrotu generowane są przez dużą liczbę małych transakcji. Zaobserwowano, że istnienie silnego fraktałnego sprzężenia między wolumenem a liczbą transakcji przenoszone jest przez te części sygnałów, które charakteryzują się dużą i średnią wariancją. Analiza kroskorelacji multifraktałnych była pierwszą tego typu analizą, która zawierała taki zestaw wielkości i takie podejście.
- Na przykładzie polskich spółek giełdowych pokazano, że wpływ cen akcji na wolumen obrotu dobrze opisuje zależność $r(V) \sim V^{1/2}$ a wykładniki skalujące ogony empirycznego rozkładu prawdopodobieństwa stóp zwrotu (α_r) oraz wolumenu obrotu (α_V) spełniają zależność $\frac{\alpha_r}{\alpha_V} \simeq \xi$, gdzie wartość $\xi \approx 2$. Dodatkową interesującą obserwacją jest to, że nie tylko rozkłady stóp zwrotu, ale także rozkłady wolumenu obrotów podlegają statystyce rozkładów $\tilde{q}$ Gauss'a.

- Analiza walutowych danych finansowych z rynku FOREX dowiodła, że główne właściwości statystyczne fluktuacji zmian cen tj. rozkłady, korelacje czasowe czy multifraktalność są jakościowo podobne do tych, które zidentyfikowano w kontekście rynków pozawalutowych.
- Zidentyfikowano kształty widm osobliwości dla różnych par walutowych. Najbardziej symetrycznym widmem okazało się widmo dla pary GBP/USD. Jeszcze bardziej intrygujące są sygnatury negatywnych wskaźników osobliwości i negatywnej osobliwości widma dla fluktuacji odchyłeń wynikających z handlu po trójkącie. Otwiera to ekscytujący kierunek do dalszych badań w kierunku być może ustanowienia bliższej analogii między dynamiką wymiany walut a zjawiskiem turbulencji.
- Ilościowa analiza korelacji pomiędzy różnymi kursami walut dowiodła, że nieefektywność bardziej płynnego rynku jakim jest rynek walutowy, w krótkich okresach czasu prowadzi do pojawienia się efektu Epps'a w okresach porównywalnych dla rynku akcji. Sugeruje to, że niesynchronizowanie transakcji nie jest jedynym źródłem obserwowanego efektu.
- Wprowadzenie dwóch modyfikacji do klasycznej metody MFDDFA znacząco wpłynęło na wyniki. W przeciwieństwie do klasycznej metody MFDDFA, widma osobliwości uzyskiwane metodą MFFDDFA dla danych syntetycznych niemal idealnie odzwierciedlają wyniki teoretyczne. Natomiast w przypadku rzeczywistych serii czasowych metoda MFFDDFA, w stosunku do metody MFDDFA, daje spektra osobliwości przesunięte w prawo. Sugeruje to, iż analizowane dane finansowe są bardziej persystentne niż wskazuje to klasyczna metoda MFDDFA.
- Analiza danych meteorologicznych pokazała, że wszystkie analizowane wielkości mają naturę antypersystentną - maksima widm multifraktalnych są przesunięte w lewo od $\alpha = 0.5$ i zlokalizowane w $\alpha \approx 0.15$. Wyróżnia się natomiast spektrum związane z temperaturą przy gruncie wskazując na jej znacznie bogatszą strukturę multifraktalną - jest ponad 4 razy szersze od pozostałych a jego maksimum i w konsekwencji wartość wykładnika Hurst'a H przesunięte jest w prawo ($\alpha \approx 0.35$). Badanie istnienia ewentualnych korelacji krzyżowych metodą MFCCA wykazało, że małoszumienna temperatura przy gruncie jest najsilniej skorelowana z temperaturą powietrza na wysokości 2 metrów.
- Analiza 9 pasm górskich Ziemi dowodzi, że sieci topograficzne grani mają naturę monofraktalną. Natomiast sieci graniowe, choć nie są fraktalne to są bezskalowe tzn. rozkład krotności węzłów ma charakter potęgowy z wykładnikiem $1,6 \leq \beta \leq 1,7$. Biorąc pod uwagę fakt, że analizowane góry różnią

się wieloma właściwościami (położeniem, wysokością, powierzchnią, wiekiem i morfologią), uzyskane charakterystyki wydają się być uniwersalne dla ziemskich terenów górskich.

- Zaproponowano metodę FPA generującą sieci bezskalowe będącą modyfikacją metody BA - sieć typu FPA może generować sieci(grafy) z potęgowymi rozkładami prawdopodobieństwa krotności węzłów $P(k) \sim k^{-\beta}$ z parametrem skalującym $1 < \beta \leq 2$. Ilościowe analizy wykazały, że sieci FPA mają interesujące właściwości topologiczne, gdzie przy odpowiednim doborze parametru f mogą (lepiej niż klasyczny model BA) odzwierciedlać cechy złożonych sieci rzeczywistych (np. sieci grani górskich omówionych w pracy K[8]).
- Zmodyfikowano klasyczny algorytm SB identyfikujący multifraktalność sieci złożonych. Proponowana metoda GSB uwzględnia zarówno połączenia pomiędzy węzłami, jak i współrzędne lokalizacji węzłów (geometrię sieci). Algorytm przetestowano dla sieci rzeczywistej i sieci syntetycznych dla różnych wariantów geometrycznych. Wykazano wrażliwość geometrii sieci na jej charakterystyki multifraktalne.

3 Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

3.1 Wykaz innych prac naukowych (nie wchodzących w skład osiągnięcia wymienionego w punkcie 2) opublikowanych w czasopismach z bazy Journal Citation Reports (JCR)

3.1.1 Przed uzyskaniem stopnia doktora

- [1] R. Rak, S. Drożdż, J. Kwapien, P. Oświęcimka, *Detecting Subtle Effects of Persistence in the Stock Market Dynamics*, Acta Physica Polonica B, 36, 2459 (2005).
- [2] P. Oświęcimka, J. Kwapien, S. Drożdż, R. Rak, *Investigating Multifractality of Stock Market Fluctuations Using Wavelet and Detrending Fluctuation Methods*, Acta Physica Polonica B, 36, 2447 (2005).
- [3] R. Rak, S. Drożdż, J. Kwapien, P. Oświęcimka, *Correlation matrix decomposition of WIG20 intraday fluctuations*, Acta Physica Polonica B, 37, 3123 (2006).

- [4] P. Oświęcimka, J. Kwapień, S. Drożdż, A.Z. Górski, R. Rak, *Multifractal model of asset returns versus real stock market dynamics*, Acta Physica Polonica B, 37, 3083 (2006).
- [5] S. Drożdż, M. Forczek, J. Kwapień, P. Oświęcimka, R. Rak, *Stock market return distributions: From past to present*, Physica A, 383, 59 (2007).
- [6] R. Rak, S. Drożdż, J. Kwapień, *Nonextensive statistical features of the Polish stock market fluctuations*, Physica A, 374, 315 (2007).

3.1.2 Po uzyskaniu stopnia doktora

- [7] R. Rak, J. Kwapień, S. Drożdż, P. Oświęcimka, *Cross-correlations in Warsaw Stock Exchange*, Acta Physica Polonica A, 114, 561 (2008).
- [8] P. Oświęcimka, J. Kwapień, S. Drożdż, A.Z. Górski, R. Rak, *Different Fractal Properties of Positive and Negative Returns*, Acta Physica Polonica A, 114, 547 (2008).
- [9] R. Rak, E. Rak, *Route to chaos in generalized logistic map*, Acta Physica Polonica A, 127, 113 (2015).
- [10] S. Drożdż, R. Kowalski, P. Oświęcimka R. Rak, R. Gębarowski, *Dynamical variety of shapes in financial multifractality*, Complexity, 7015721 (2018).
- [11] B. Pekala, E. Rak, B. Kwiatkowski, A. Szczur, R. Rak, *The use of concave and convex functions to optimize the feed-rate of numerically controlled machine tools*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 2020-July, 9177569 (2020).

3.2 Publikacje w czasopismach spoza bazy JCR

- [1] R. Rak, S. Drożdż, P. Oświęcimka, *Charakterystyki fluktuacji finansowych*, Ekonomia, 25, 172 (2011).
- [2] P. Oświęcimka, S. Drożdż, J. Kwapień, R. Rak, *Czy można przewidzieć krach?*, Ekonomia, 25, 163 (2011).
- [3] P. Oświęcimka, J. Kwapień, I. Celińska, S. Drożdż, R. Rak, *Computational approach to multifractal music*, <https://arxiv.org/abs/1106.2902> (2011).

3.3 Podstawowe informacje bibliometryczne

(dane na dzień 12.09.2023r.)

3.3.1 Wg Web of Science

Łączna liczba cytowań: 557 - cytowane przez 366 prac

Łączna liczba cytowań bez autocytowań: 516

Sumaryczny Impact Factor wg. listy Journal Scitation Reports (JCR):

Indeks Hirsch: 11

3.3.2 Wg Scopus

Łączna liczba cytowań: 561 - cytowane przez 380 prac

Indeks Hirsch: 11

3.3.3 Wg Google Scholar

Łączna liczba cytowań: 778

Indeks Hirsch: 12

Indeks i10: 13

3.4 Kierowanie międzynarodowymi lub krajowymi projektami badawczymi lub udział w takich projektach

Kierowanie projektem badawczym NCN "Miniatura I"; Poszukiwanie składowych deterministycznych w rzeczywistych układach złożonych, (2017/01/X/ST2/00020) w okresie od 24.08.2017 do 23.08.2018.

3.5 Aktywny udział w międzynarodowych i krajowych konferencjach naukowych

1. *Measuring subtle effects of persistence in the stock market dynamics*, First Polish Symposium on Econo- and Sociophysics , 19-20 November 2004, Warsaw.
2. *Route to chaos in generalized logistic map*, 7th International Workshop for Young Mathematicians, 20-26 September 2004, Cracow.

3. *Correlation matrix decomposition of intraday WIG20 fluctuations*, Second Polish Symposium on Econo- and Sociophysics, 21-22 April 2006, Cracow.
4. *Błądzenie przypadkowe po Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych*, Pierwsza Rzeszowska Konferencja Młodych Fizyków, 8-9 czerwca 2006, Rzeszów.
5. *Correlation matrix decomposition of intraday companies and WIG20 fluctuations*, XIII Międzynarodowa Konferencja Matematyczno-Informatyczna, 1-4 lipca 2007, Chełm.
6. *Cross-correlations in Warsaw Stock Exchange*, Third Polish Symposium on Econo- and Sociophysics, 22-24 November 2007, Wrocław.
7. *Fourth Polish Symposium on Econo- and Sociophysics*, 7-9 May 2009, Rzeszów.
8. *Charakterystyki fluktuacji finansowych*, XV Konferencja Naukowa Młodych Ekonomistów-przyszłość gospodarki po światowym kryzysie, 21-22 września 2009, Warszawa.
9. *Characteristics of fluctuations for the stock and currency markets*, Econophysics Colloquium, 4-6 November 2010, Taipei, Taiwan.
10. *Characteristics of distributions for the stock returns and trading volumes*, Fifth Polish Symposium on Econo- and Sociophysics, 25-27 November 2010, Warsaw.
11. *Complexity characteristics of multifractal music*, 4th International Interdisciplinary Chaos Symposium on "Chaos and Complex Systems", 29 April – 02 May 2012, Antalya, Turkey.
12. *Multifractal characteristics of music*, 15th International Conference on Functional Equations and Inequalities (15th ICFEI), 19-25 May 2013, Ustroń.
13. *Cross-correlations between stock market returns and trading volume*, International Conference on Econophysics and Asia-Pacific Econophysics Conference, 31 May - 2 June 2014, Shanghai, China.
14. *Flexibly detrended multifractal fluctuation analysis*, 7th Polish Symposium on Econo- and Sociophysics, 14-17 May 2014, Lublin.
15. *Quantitative analysis of meteorological data*, 8th Polish Symposium on Econo- and Sociophysics (International conference), 4-6 November 2015, Rzeszów.

16. *The impact of heavy tailed asymmetric and symmetric probability distributions on spurious multifractality*, 13th Econophysics Colloquium and 9th Symposium on Physics in Economy and Social Sciences, 5-7 July 2017, Warsaw.
17. *The use of concave and convex functions to optimize the feed-rate of numerically controlled machine tools*, IEEE WORLD CONGRESS ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE (WCCI) 2020, 19 – 24th July, 2020, Glasgow (UK).

3.6 Udział w komitetach organizacyjnych międzynarodowych i krajowych konferencji naukowych

- 2009** - Główny organizator i członek komitetu naukowego konferencji; 4th Polish Symposium on Econo- and Sociophysics, 7-9 maja, Rzeszów.
- 2015** - Główny organizator i członek komitetu naukowego konferencji; 8th Polish Symposium on Econo- and Sociophysics (International conference), 4-6 listopada, Rzeszów.
- 2009** - Członek komitetu organizacyjnego; XV Konferencja Naukowa Młodych Ekonomistów-przyszłość gospodarki po światowym kryzysie, 21-22 września, Warszawa.

3.7 Otrzymane nagrody i wyróżnienia

- 2009** - Nagroda Rektora Uniwersytetu Rzeszowskiego za wyróżniającą się rozprawę doktorską.
- 2011, 2013-2017** - Grant Dziekański, Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytet Rzeszowski, Rzeszów.

3.8 Udział w komitetach redakcyjnych i radach naukowych czasopism

- 2010** - Członek komitetu edytorskiego z uprawnieniami do decydowania o przyjmowaniu prac do druku; Acta Physica Polonica A, vol.117, no.4, 2010.
- 2016** - Członek komitetu edytorskiego z uprawnieniami do decydowania o przyjmowaniu prac do druku; Acta Physica Polonica A, vol.129, no.5, 2016.

2020 - Edytor w czasopiśmie 'Entropy', Special Issue "Fractal and Multifractal Analysis of Complex Networks I", section Complexity, 2020–15.07.2022. Przeprowadziłem procedowanie 15 zgłoszonych prac. Osiem z nich zostało opublikowanych.

2023 - Edytor w czasopiśmie 'Entropy', Special Issue "Fractal and Multifractal Analysis of Complex Networks II", section Complexity, 15.07.2022 – 03.10.2023. Przeprowadziłem procedowanie 7 zgłoszonych prac. Dwie z nich zostało opublikowanych.

3.9 Członkostwo w międzynarodowych lub krajowych organizacjach i towarzystwach naukowych

2009 - do teraz - Członek Polskiego Towarzystwa Fizycznego.

2010 - 2012 - Skarbnik Polskiego Towarzystwa Fizycznego oddz. Rzeszów.

2021 - do teraz - Członek Komisji Rewizyjnej Sekcji FENS PTF.

3.10 Staże w zagranicznych lub krajowych ośrodkach naukowych lub akademickich

1. Ecole Normale Supérieure, "Models for Complex Systems in Human and Social Sciences", Summer school, 19-31 lipca 2004, Lyon.
2. Instytut Fizyki Jądrowej PAN w Krakowie (Zakład Teorii Systemów Złożonych), od 01.10.2008 do 30.06.2009, staż naukowy.
jakie prace, opis
3. Politechnika Krakowska, Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki (Zakład Modelowania Systemów Złożonych), od 01.02.2015 do 30.06.2015, staż naukowo-dydaktyczny w ramach programu "UR - Nowoczesność i przyszłość regionu".
jakie prace, opis
4. Instytut Fizyki Jądrowej PAN w Krakowie (Zakład Teorii Systemów Złożonych), od 01.09.2016 do 31.01.2017, staż naukowy.

Efektom powyższych staży były prace opublikowane w latach przebywania na nich, gdzie dwie z nich zawierają afilicje instytucji, w których były odbywane staże:

R. Rak, J. Kwapien, P. Oświęcimka, P. Zięba, S. Drożdż, *Universal features of mountain ridge networks on Earth*, Journal of Complex Networks, 8(1), cnz17, (2020).

R. Rak, D. Grech, *Quantitative approach to multifractality induced by correlations and broad distribution of data*, Physica A, 508, 48 (2018).

3.11 Recenzowanie publikacji naukowych w czasopismach międzynarodowych i krajowych

- 1) Acta Physica Polonica B / 2 artykuły
- 2) Acta Physica Polonica A / 6 artykułów
- 3) Communic. in Nonlinear Science and Numerical Simulation / 1 artykuł
- 4) Physica A / 2 artykuły
- 5) Entropy / 8 artykułów

4 Działalność dydaktyczna i popularyzatorska

4.1 Osiągnięcia dydaktyczne w zakresie popularyzacji nauki

2009 - 2011 - wykonawca w projekcie FENIKS (długofalowy program odbudowy, popularyzacji i wspomagania fizyki w szkołach w celu rozwijania podstawowych kompetencji naukowo - technicznych, matematycznych i informatycznych uczniów, realizowany w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki (1/POKL/3.3.4/08) Europejskiego Funduszu Społecznego).

2011, 2013 - Pełnienie roli "trenera naukowego" podczas letnich obozów naukowych w roku 2011 oraz 2013 dla wybitnych uczniów z woj. podkarpackiego, woj. małopolskiego i woj. lubelskiego w ramach programu (PO KL), Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne.

4.2 Opieka naukowa nad doktorantami

Opieka nad doktorantami w charakterze promotora pomocniczego:

1. Rafał Kowalski, Instytut Fizyki Jądrowej PAN w Krakowie; otwarcie przewodu doktorskiego 19.11.2018r., tytuł rozprawy "Multiscale financial correlations in Ising-inspired agent-based models". Obrona w dniu 07.09.2021r.

4.3 Opieka nad studentami w charakterze promotora pracy inżynierskiej/magisterskiej

1. Joanna Jedziniak, praca inżynierska pt. "Charakterystyki korelacji fluktuacji finansowych", Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytet Rzeszowski, Rzeszów, 2015.
2. Vladyslav Horblianskyi, praca magisterska pt. "Analiza sieci ulicznej miasta rzeszowa w kontekście teorii sieci złożonych", Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytet Rzeszowski, Rzeszów, 2018.
3. Michał Dałomis, praca inżynierska pt. "Statystyczne aspekty fluktuacji rejestrowanych wskaźnikiem interfejsu graficznego", Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytet Rzeszowski, Rzeszów, 2019.
4. Dominik Rogosz, praca inżynierska pt. "Struktura strony www.ur.edu.pl w kontekście sieci złożonych", Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytet Rzeszowski, Rzeszów, 2019.

4.4 Pełnione funkcje

- 1) 2012-2015 - przewodniczący Wydziałowej Komisji Wyborczej Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego.
- 2) 2013.10-do teraz - kierownik Pracowni Dynamiki Procesów Ekonomicznych i Społecznych w Laboratorium Prognoz i Badań Systemowych, Centrum Innowacji i Transferu Wiedzy Techniczno-Przyrodniczej (CiTWTP), Kolegium Nauk Przyrodniczych, Uniwersytet Rzeszowski.
- 3) 2014-2016 - członek Wydziałowej Komisji Rekrutacyjnej Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego, Uniwersytet Rzeszowski.
- 4) 2008-2010 - współkoordynator merytoryczny „Uniwersyteckiego Centrum Innowacji i Transferu Wiedzy Techniczno-Przyrodniczej” realizowanego w ramach Regionalnego Programu Operacyjnego Województwa Podkarpackiego, Priorytet I. Konkurencyjna i Innowacyjna Gospodarka, Działanie 1.3 - regionalny System Innowacji.
- 5) 2011-2013 - ekspert do oceny merytorycznej wniosków o przyznanie stypendiów doktoranckich w ramach projektu „Podkarpacki fundusz stypendialny dla doktorantów”, Departament Edukacji, Nauki i Sportu Urzędu Marszałkowskiego Województwa Podkarpackiego w Rzeszowie.

4.5 Działalność dydaktyczna

- 1) 2004-2023 - recenzowanie kilkunastu prac magisterskich z zakresu fizyki, Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytet Rzeszowski, Rzeszów.
- 2) 2003-2023 - prowadzenie wykładów, ćwiczeń i laboratoriów dla studentów fizyki i informatyki. Były to m.in.: fizyka statystyczna, elementy fizyki współczesnej, informatyczne narzędzia fizyki, architektura systemów komputerowych, komputerowe systemy pomiarowe, rachunek prawdopodobieństwa i statystyka, analiza matematyczna, algebra liniowa z geometrią, metody matematyczne fizyki, wykład monograficzny, modelowanie komputerowe procesów fizycznych.

Literatura

- [1] B.B. Mandelbrot, New Scientist 127 1734, 38 (1990).
- [2] J. Kwapien, S. Drożdż, Physics Reports, 515, 115 (2012).
- [3] J.F. Muzy, E. Bacry, R. Baile, P. Poggi, Europhysics Letters, 82, ID 60007 (2008).
- [4] A.R. Subramaniam, I.A. Gruzberg, A.W.W. Ludwig, Physical Review B, 78, ID 245105 (2008).
- [5] P.Ch. Ivanov, L. A. N. Amaral, A. L. Goldberger, S. Havlin, M. G. Rosenblum, Z. R. Struzik, H. E. Stanley, Nature, 399, 461 (1999).
- [6] D. Makowiec, A. Dudkowska, R. Gałaska, A. Rynkiewicz, Physica A, 388, 3486 (2009).
- [7] A. Rosas, E. Nogueira Jr., J.F. Fontanari, Physical Review E, 66, ID 061906 (2002).
- [8] H.E. Stanley, P. Meakin, Nature, 335, 405 (1988).
- [9] V.V. Udovichenko, P.E. Strizhak, Theoretical and Experimental Chemistry, 38, 259 (2002).
- [10] A. Witt, B.D. Malamud, Surveys in Geophysics, 34, 541 (2013).
- [11] L. Telesca, V. Lapenna, M. Macchiato, New Journal of Physics, 7, ID 214 (2005).

- [12] E. Koscielny-Bunde, J.W. Kantelhardt, P. Braund, A. Bunde, S. Havlin, Journal of Hydrology, 322, 120 (2006).
- [13] J.W. Kantelhardt, E. Koscielny-Bunde, D. Rybski, P. Braun, A. Bunde, S. Havlin, Journal of Geophysical Research (Atmospheres), 111, D01106 (2006).
- [14] M. Ausloos, Physical Review E, 86, ID 031108 (2012).
- [15] S. Drożdż, P. Oświęcimka, A. Kulig, J. Kwapień, K. Bazarnik, I. Grabska-Gradzińska, J. Rybicki, M. Stanuszek, Information Sciences, 331, 32 (2016).
- [16] E.A.F. Ihlen, B.Vereijken, Human Movement Science, 32, 633 (2013).
- [17] G.R. Jafari, P. Pedram, L. Hedayatifar, Journal of Statistical Mechanics, P04012 (2007).
- [18] P. Oświęcimka, J. Kwapień, I. Celińska, S. Drożdż, R. Rak, "Computational approach to multifractal music", arXiv:1106.2902 (2011).
- [19] Z. Nagy, P. Mukli, P. Herman, Andras Eke, Frontiers in Physiology, 8, ID 533 (2017).
- [20] D. Ghosh, S. Dutta, S. Chakraborty, Chaos, Solitons and Fractals, 67, 1 (2014).
- [21] D.G. Stephen, W-H. Hsu, D. Young, E.L. Saltzman, K.G. Holt, D.J. Newman, M. Weinberg, R.J. Wood, R. Nagpal, E.C. Goldfield, Chaos, Solitons and Fractals, 45, 1201 (2012).
- [22] C-H. You, D-I. Lee, K. Kim, Journal of the Korean Physical Society, 66, 1617 (2015).
- [23] P.D. Domański, International Journal of Bifuraction and Chaos, 27, 6, ID 1750094 (2017).
- [24] D.G. Kelty-Stephen, Chaos, Solitons and Fractals, 104, 363 (2017).
- [25] D.G. Kelty-Stephen, K. Palatinus, E. Saltzman, J.A. Dixon, Ecological Psychology, 25, 1 (2013).
- [26] M. Ausloos, K. Ivanova, Computer Physics Communications, 147, 582 (2002).
- [27] L. Calvet, A. Fisher, The Review of Economics and Statistics, 84, 381 (2002).
- [28] A. Turiel, C.J. Perez-Vicente, Physica A, 355, 475 (2005).

- [29] P. Oświęcimka, J. Kwapień, S. Drożdż, *Physica A*, 347, 626 (2005).
- [30] W.-X. Zhou, *Europhysics Letters*, 88, ID 28004 (2009).
- [31] M.I. Bogachev, A. Bunde, *Physical Review E* 80, ID 026131 (2009).
- [32] Z.-Y. Su, Y.-T. Wang, H.-Y. Huang, *Journal of the Korean Physical Society*, 54, 1395 (2009).
- [33] P. Oświęcimka, S. Drożdż, J. Kwapień, A.Z. Górski, *Acta Physica Polonica A*, 123, 597 (2013).
- [34] S. Dutta, D. Ghosh, S. Chatterjee, *Physica A*, 463, 188 (2016).
- [35] D. Grech, *Chaos, Solitons and Fractals* 88, 183 (2016).
- [36] S. Bayraci, *International Journal of Computational Economics and Econometrics*, 8, 95 (2018).
- [37] M. Chorowski, R. Kutner, *Entropy* 24(1), 130 (2022).
- [38] E. Bacry, J. Delour, J.F. Muzy, *Physica A*, 299, 84 (2001).
- [39] P. Oświęcimka, J. Kwapień, S. Drożdż, A.Z. Górski, R. Rak, *Acta Physica Polonica B*, 37, 3083 (2006).
- [40] T. Lux, *Journal of Business & Economic Statistics*, 26, 194 (2008).
- [41] J. Perelló, J. Masoliver, A. Kasprzak, R. Kutner, *Physical Review E*, 78, ID 036108 (2008).
- [42] S. Drożdż, R. Kowalski, P. Oświęcimka R. Rak, R. Gębarowski, *Complexity*, ID 7015721 (2018).
- [43] A.-L. Barabási, *Science* 325, 412-413 (2009).
- [44] K. Matia, Y. Ashkenazy, H. E. Stanley, *Europhysics Letters*, 61, 422 (2003).
- [45] J. Kwapień, P. Oświęcimka, S. Drożdż, *Physica A*, 350, 466 (2005).
- [46] L. G. Moyana, J. de Souza, S. M. D. Queiros, *Physica A*, 371, 118 (2006).
- [47] J. Jiang, K. Ma, X. Cai, *Physica A*, 378, 399 (2007).
- [48] K. E. Lee, J. W. Lee, *Physica A*, 383, 65 (2007).
- [49] G. Lim, S. Kim, H. Lee, K. Kim, D.-I. Lee, *Physica A*, 386, 259 (2007).

- [50] P. Oświęcimka, J. Kwapień, S. Drożdż, A. Z. Górski, R. Rak, *Acta Physica Polonica A*, 114, 3 (2008).
- [51] J. W. Kantelhardt, S. A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde, H.E. Stanley, *Physica A*, 316, 87 (2002).
- [52] A.Y. Schumann, J.W. Kantelhardt, *Physica A*, 390, 2637 (2011).
- [53] Th. Lux, M. Ausloos, Market fluctuations: scaling, multi-scaling and their possible origins, in: A. Bunde, J. Kropp, H.-J. Schellnhuber (Eds.), *The Science of Disaster: Scaling Laws Governing Weather, Body, Stock-Market Dynamics*, Springer Verlag, Berlin, 377 (2002).
- [54] D. Grech, G. Pamuła, *Physica A*, 392, 5845 (2013).
- [55] G. Pamuła, D. Grech, *Europhysics Letters*, 105, 50004 (2014).
- [56] J. Ludescher, M.I. Bogachev, J.W. Kantelhardt, A.Y. Schumann, A. Bunde, *Physica A*, 390(13), 2480 (2011).
- [57] D. Gulich, L. Zunino, *Physica A*, 391(16), 4100 (2012).
- [58] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.*, 52, 479 (1988).
- [59] C. Tsallis, R.S. Mendes, A.R. Plastino, *Physica A*, 261, 534 (1998).
- [60] C. Tsallis, S.V.F. Levy, A.M.C. Souza, R. Maynard, *Physical Review Letters*, 75, 3589 (1995).
- [61] D. Prato, C. Tsallis, *Physical Review E*, 60, 2398 (1999).
- [62] C. Tsallis, *Physica A*, 365, 7 (2006).
- [63] C. Tsallis, *Braz. J. Phys.*, 29, 1 (1999).
- [64] R. Rak, S. Drożdż, J. Kwapień, *Physica A*, 374, 315 (2007).
- [65] J.F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, 2, 245 (1994).
- [66] P. Oświęcimka, J. Kwapień, S. Drożdż, *Physical Review E* 74, 016103 (2006).
- [67] B. Podobnik, D. Horvatic, A.M. Petersen, H.E. Stanley, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 106, 22079 (2009).
- [68] Y. Yuan, X.-T. Zhuang, Z.-Y. Liu, *Physica A*, 391, 3484 (2012).

- [69] S. Drożdż, J. Kwapień, F. Grümmer, F. Ruf, J. Speth, *Acta Physica Polonica B*, 34, 4293 (2003).
- [70] S. Drożdż, M. Forczek, J. Kwapień, P. Oświęcimka, R. Rak, *Physica A*, 383, 59 (2007).
- [71] F. Botta, H.S. Moat, H.E. Stanley, T. Preis, *PLoS ONE*, 10, e0135600 (2015).
- [72] P. Oświęcimka, S. Drożdż, M. Forczek, S. Jadach, J. Kwapień, *Physical Review E*, 89, 023305 (2014).
- [73] B. Podobnik, H.E. Stanley, *Physical Review Letters*, 100, 084102 (2008).
- [74] X. Gabaix, P. Gopikrishnan, V. Plerou, H.E. Stanley, *Nature*, 423, 267 (2003).
- [75] X. Gabaix, P. Gopikrishnan, V. Plerou, H.E. Stanley, *Quart. J. Econ.*, 121, 461 (2006).
- [76] B.M. Hill, *Ann. Math. Stat.*, 3, 1163 (1975).
- [77] W.-X. Zhou, *Quant. Finance*, 12, 1253 (2012).
- [78] V. Plerou, P. Gopikrishnan, L.A.N. Amaral, M. Meyer, H.E. Stanley, *Physical Review E*, 60, 6519 (1999).
- [79] P. Gopikrishnan, V. Plerou, X. Gabaix, H.E. Stanley, *Physical Review E*, 62, R4493 (2000).
- [80] V. Plerou, H.E. Stanley, *Physical Review E*, 76, 046109 (2007).
- [81] J.-P. Bouchaud, J.D. Farmer, F. Lillo, In *Handbook of financial markets: dynamics and evolution* by Thorsten Hens, Klaus Reiner Schenk-Hoppé (North Holland), (2009).
- [82] V. Plerou, P. Gopikrishnan, X. Gabaix, H.E. Stanley, *Quant. Finance*, 4, C11 (2004).
- [83] J.D. Farmer, F. Lillo, *Quant. Finance*, 4, C7 (2004).
- [84] J.D. Farmer, L. Gillemot, F. Lillo, S. Mike, A. Sen, *Quant. Finance*, 4, 383 (2004).
- [85] D. Gillaume, M.M. Dacorogna, R. Dave, U. Müller U, R.B. Olsen, O.V. Pictet, *Fin. Stochastics*, 1, 95 (1997).

- [86] J. Kwapień, S. Drożdż, A.A. Ioannides, *Physical Review E*, 62, 5557 (2000).
- [87] J. Kwapień, S. Drożdż, F. Grümmer, F. Ruf, J. Septh, *Physica A*, 309, 171 (2002).
- [88] T.W. Epps, *J. Am. Stat. Assoc.* 74, 291 (1979).
- [89] J. Kwapień, S. Drożdż, J. Speth, *Physica A*, 337, 231 (2004).
- [90] B. Tóth, J. Kertész, *Quant. Finance*, 9, 793 (2009).
- [91] L. Zhang, *Journal of Econometrics*, 160, (1), 33 (2011).
- [92] A. Fisher, L. Calvet, B. Mandelbrot, “Multifractality of Deutschemark/US dollar exchange rates”, Cowles Foundation Discussion Paper No. 1166 (1997).
- [93] B.B. Mandelbrot, *Physica A*, 168, 95 (1990).
- [94] B.B. Mandelbrot, C.J.G. Evertsz, Y. Hayakawa, *Physical Review A*, 42, 4528 (1990).
- [95] J. Lee, H.E. Stanley, *Physical Review Letters*, 61, 2945 (1988).
- [96] B.B. Mandelbrot, *J. Fluid Mech.*, 62, 331 (1974).
- [97] B.B. Mandelbrot, *J. Stat. Phys.*, 110, 739 (2003).
- [98] H.E. Hurst, *Transactions of American Society of Civil Engineers*, 116, 770 (1951).
- [99] B.B. Mandelbrot, J.W. Van Ness, *SIAM Review*, 10, 422 (1968).
- [100] B.B. Mandelbrot, J.R. Wallis, *Water Resour. Res.*, 5, (1969).
- [101] C.-K. Peng, S.V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H.E. Stanley, A.L. Goldberger, *Physical Review E*, 49, 1685 (1994).
- [102] K. Hu, P. Ivanov, Z. Chen, P. Carpena, H.E. Stanley, *Physical Review E*, 64, 011114 (2001).
- [103] D. Grech, Z. Mazur, *Acta Physica Polonica B*, 36, 8 (2005).
- [104] M. Ignaccolo, P. Allegrini, P. Grigolini, P. Hamilton, B.J. West, *Physica A*, 336, 595 (2004).
- [105] A. Arnéodo, E. Bacry, J.F. Muzy, *Physica A*, 213, 232 (1995).

- [106] E. Alessio, A. Carbone, G. Castelli, V. Frappietro, *Eur. Phys. J. B*, 27, 197 (2002).
- [107] A. Carbone, G. Castelli, H. E. Stanley, *Physical Review E*, 69, 026105 (2004).
- [108] J. Alvarez-Ramirez, E. Rodriguez, J. C. Echeverria, *Physica A*, 354, 199 (2005).
- [109] L.M. Xu, P.C. Ivanov, K.Hu, Z. Chen, A. Carbone, H.E. Stanley, *Physical Review E*, 71, 051101 (2005).
- [110] G.-F. Gu, W.-X. Zhou, *Physical Review E*, 82, 011136 (2010).
- [111] W.-X. Zhou, *Physical Review E*, 77, 066211 (2008).
- [112] D. Horvatic, H.E. Stanley, B. Podobnik, *Europhysics Letters*, 94, 18007 (2011).
- [113] C. Sims, *Econometrica*, 48, 1 (1980).
- [114] A. Stahr, E. Langenscheidt, *Landforms of High Mountains*, Springer-Verlag (Berlin Heidelberg)(2015).
- [115] J. Koyama, *Springer Science+Business Media (Dordrecht)* (1997).
- [116] J. Babault, Van Den Driessche, A. J. & Teixell, *Tectonics* 31, TC4020 (2012).
- [117] N. Hovius, C.P. Stark, M.A. Tutton, L.D. Abbott, *Geology* 26, 1071-1074 (1998).
- [118] O. Korup, J.J. Clague, R.L. Hermanns, K. Hewitt, A.L. Strom, J.T. Weidinger, *Earth Planet. Sci. Lett.* 261, 578-589 (2007).
- [119] J.D. Pelletier, *Geomorphology* 53, 183-196 (2003).
- [120] L.A. McGuire, J.D. Pelletier, J.A. Gómez, M.A. Nearing, *J. Geophys. Res.* 118, 241-256 (2013).
- [121] A.D. Howard, W.E. Dietrich, M.A. Seidl, *J. Geophys. Research* 99, 13971-13986 (1994).
- [122] D.R. Montgomery, *Geology* 30, 1047-1050 (2002).
- [123] P. Molnar, R.S. Anderson, S.P. Anderson, *J. Geophys. Res.* 112, F03014 (2007).
- [124] C. Werner, *Ann. Assoc. Am. Geograph* 78, 253-270 (1988).

- [125] D.G. Tarboton, R.L. Bras, I. Rodriguez-Iturbe, *Water Res. Research* 24, 1317-1322 (1998).
- [126] P.S. Dodds, D.H. Rothman, *Phys. Rev. E* 59, 4865-4877 (1999).
- [127] P. La Barbera, R. Rosso, *Water Res. Research* 25, 735-741 (1989).
- [128] G. Reeb, *Comptes Rendus Acad. Sciences Paris* 222, 847-849 (1946).
- [129] M. Morse, *J. Assoc. Comp. Machin.* 15, 205-220 (1968).
- [130] J.L. Pfaltz, *Geogr. Anal.* 8, 77-93 (1976).
- [131] D.M. Mark, *Topological randomness of geomorphic surfaces*. Ph.D. thesis, Simon Fraser University (1977).
- [132] P. Japsen, J.A. Chalmers, *Global and Planetary Change*, 165-173 (2000).
- [133] J.A. Chalmers, P. Green, P. Japsen, E.S. Rasmussen, The Scandinavian mountains have not persisted since the Caledonian orogeny, *J. Geodyn.* 50, 94-101 (2010).
- [134] C. Song, S. Havlin, H.A. Makse, *Nature* 433, 392-395 (2005).
- [135] J.S. Gagnon, S. Lovejoy, D. Schertzer, *Nonlin. Processes Geophys* 13, 541-570 (2006).
- [136] S. Lovejoy, D. Schertzer, *Nonlin. Processes Geophys.* 14, 465-502 (2007).
- [137] D. Schertzer, S. Lovejoy, *Int. J. Bif. Chaos* 21, 3417-3456 (2011).
- [138] T. Tél, À. Fülöp, T. Vicsek, *Physica A* 159, 155-166 (1989).
- [139] J.-L. Liu, Z.G. Yu, V. Anh, *Chaos* 25, 023103 (2015).
- [140] P. Erdős, A. Rényi, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Köz. 5*, 17-61 (1960).
- [141] M. Faloutsos, P. Faloutsos, C. Faloutsos, *Comput. Commun. Rev.* 29, 251-262 (2008).
- [142] E.W. Zegura, K.L. Calvert, M.J. Donahoo, *IEEE/ACM Transactions on Networking* 5, 770-783 (1997).
- [143] R. Pastor-Satorras, A. Vazquez, A. Vespignani, *Phys. Rev. Lett.* 87, 258701 (2001).

- [144] Albert, R. Jeong, H. Barabasi, A.L. Diameter of the world-wide web, *Nature* 401, 130–131 (1999).
- [145] D. Butler, *Nature* 405, 112–115 (2000).
- [146] A. Broder, R. Kumar, F. Maghoul, P. Raghavan, S. Rajagopalan, R. Stata, A. Tomkins, J. Wiener, *Comput. Networks* 33 309–320 (2000).
- [147] M. Krawczyk, L. Muchnik, A. Mańka-Krasoń, K. Kułakowski, *Physica A* 390(13), 2611 (2011).
- [148] R.J. Williams, N.D. Martinez, *Nature* 404, 180–183 (2000).
- [149] F. Liljeros, C.R. Edling, L.A.N. Amaral, H.E. Stanley, Y. Aberg, *Nature* 411, 907–908 (2001).
- [150] S. Ronen, B. Gonçalves, K.Z. Hua, A. Vespignani, S. Pinkere, C.A. Hidalgo, *PNAS* 111, 5616–5622 (2014).
- [151] R. Albert, A.L. Barabasi, *Phys. Rev. Lett.* 85, 5234 (2000).
- [152] M.E.J. Newman, *Proc. Natl. Acad. Sci.* 98, 404–409 (2001).
- [153] A.L. Barabasi, H. Jeong, Z. Neda, E. Ravasz, A. Schubert, T. Vicsek, *Physica A* 311, 590–614 (2002).
- [154] S. Drożdż, A. Kulig, J. Kwapien, A. Niewiarowski, M. Stanuszek, *Journal of Informetrics* 11, 1114–1127 (2017).
- [155] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z.N. Oltvai, A.L. Barabasi *Nature*, 407, 651–654 (2000).
- [156] H. Jeong, S. Mason, A.L. Barabasi, Z.N. Oltvai *Nature*, 411, 41–42 (2001).
- [157] P. Erdős, A. Rényi, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* 5, 17–61 (1960).
- [158] K.I. Goh, E. OH, H. Jeong, B. Kahng, D. Kim, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 99, 12583–12588 (2002).
- [159] X.F. Wang, G. Chen, *IEEE Circuits and Systems Magazine* 3, 6–20 (2003).
- [160] A. Fronczak, P. Fronczak, J.A. Holyst, *Phys. Rev. E* 70, 056110 (2004).
- [161] A.L. Barabási, R. Albert, *Science* 286, 509–512 (1999).
- [162] S.N. Dorogovtsev, J.F.F. Mendes, A.N. Samukhin, *Phys. Rev. Lett.* 85, 4633–4636 (2001).

- [163] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman, San Francisco (1982).
- [164] C. Song, S. Havlin, H.A. Makse, *Nature Physics* 2, 275–281 (2006).
- [165] L.K. Gallos, H.A. Makse, M. Sigman, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 109(8), 2825–2830 (2012).
- [166] A. Watanabe, S. Mizutaka, K. Yakubo, *J. Phys. Soc. Jpn.* 84(11), 114003 (2015).
- [167] H. Koorehdavoudi, P. Bogdan, *Sci. Rep.* 6, 27602 (2016).
- [168] V. Balaban, S. Lim, G. Gupta, J. Boedicker, P. Bogdan, *Sci. Rep.* 8, 12416, (2018).
- [169] D. Wang, Z. Yu, V. Anh, *Chin. Phys. B* 21(8), 080504 (2012).
- [170] B. Li, Z. Yu, Y. Zhou, *J. Stat. Mech.* P02020, <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2014/02/P02020> (2014).
- [171] Tél, T.; Vicsek, T. Geometrical multifractality of growing structures. *J. Phys. A* **1987**, 20, L835–L840.
- [172] Y. Song, J. Liu, Z. Yu, B. Li, *Sci. Rep.* 5, 17628 (2015).
- [173] Y. Xue, P. Bogdan, *Sci. Rep.* 7, 7487 (2017).
- [174] Y. Ding, J-L. Liu, X. Li, Y-C. Tian, Z-G. Yu, *Phys. Rev. E* 103, 043303 (2021).