AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko

Agnieszka Wiśniowska-Wajnryb

2. Stopnie i tytuły naukowe

- **Doktor nauk matematycznych w zakresie matematyki**
Wydział Matematyki, Uniwersytet Łódzki (1999)
Tytuł rozprawy: "Obszary ograniczone stożkowymi a podklasy funkcji gwiaździstych"
Promotor: Prof. dr. hab. Jan Stankiewicz

- **Magister matematyki**
Wydział Matematyki i Fizyki, Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Rzeszowie (1992)
Tytuł pracy: Funkcje gwiaździste i ich uogólnienia
Promotor: Prof. dr. hab. Jan Stankiewicz

3. Informacja o zatrudnieniu w jednostkach naukowych

- 1992–1999
asystent w Katedrze Matematyki Politechniki Rzeszowskiej

- 1999–
adiunkt w Katedrze Matematyki Politechniki Rzeszowskiej - obecnie adiunkt w Zakładzie Topologii i Algebry, Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

- od lutego 2003 roku do października 2006 roku - urlop macierzyński i wychowawczy

4. Wskazanie osiągnięcia naukowego

- Tytuł osiągnięcia naukowego

Funkcje jednostajnie wypukłe i jednostajnie gwiaździste

- Lista prac stanowiących osiągnięcie naukowe

[H1] Wiśniowska-Wajnryb A., Some extremal bounds for subclasses of univalent functions, APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION, 2009, 215, 2634-2641.

[H2] Sokół J., Wiśniowska-Wajnryb A., On certain problem in the class of k-starlike functions, COMPUTERS AND MATHEMATICS WITH APPLICATIONS, 2011, 62, 4733-4741.

[H3] Wiśniowska-Wajnryb A., On classes of uniformly starlike functions, ANNALES POLONICI MATHEMATICI, 2013, 1, 11-19.

[H4] Wiśniowska-Wajnryb A., The order of starlikeness of the class of uniformly starlike functions, MATHEMATISCHE NACHRICHTEN, 2016, 289, No. 16, 2083-2088

[H5] Wiśniowska-Wajnryb A., The order of starlikeness of uniformly convex functions, JOURNAL OF APPLIED ANALYSIS, 2017, 23(1); 33-38.

[H6] A. Lecko, A. Wiśniowska, Geometric properties of subclasses of starlike functions, JOURNAL OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS, 155, 2003, 383–387

[H7] Wiśniowska-Wajnryb A., On a simple sufficient condition for the uniform starlikeness, BULLETIN OF THE MALAYSIAN MATHEMATICAL SCIENCES SOCIETY, przyjęta do druku.

Funkcje jednostajnie wypukłe i jednostajnie gwiaździste

1. Wprowadzenie

Prezentowany cykl artykułów mieści się w geometrycznej teorii funkcji analitycznych. Dziedzina ta zaczęła się rozwijać w początkach XX wieku. Duży wkład w jej rozwój mieli tacy matematycy, jak Study, Nevanlinna, Alexander, Köebe, Ahlfors, Löwner. Słynna hipoteza Bieberbacha przez kilkadziesiąt lat napędzała badania w tej dziedzinie. Udowodnienie w 1985 roku tej hipotezy przez Louisa de Brangesa, wbrew sceptykom, nie spowodowało zahamowania rozwoju geometrycznej teorii funkcji. Nadal publikowanych jest wiele artykułów w liczących się czasopismach naukowych, odbywają się cykliczne konferencje międzynarodowe, co świadczy o niesłabnącym zainteresowaniu tą tematyką. Według klasycznej monografii Gołuzina geometryczna teoria funkcji bada rodziny funkcji zespolonych zadane przez dowolną własność geometryczną. Omówione poniżej rezultaty wpisują się w tę definicję.

Niech $\mathcal{A}$ oznacza zbiór funkcji f, które są analityczne w kole jednostkowym $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$ i unormowane warunkami $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Przez $\mathcal{S}$ oznaczamy podzbiór zbioru $\mathcal{A}$ złożony z funkcji jednolistnych w kole U.

Mówimy, że zbiór $D \subset \mathbb{C}$ jest gwiaździsty względem punktu $w_0 \in D$, jeżeli odcinek łączący w_0 z dowolnym punktem w zbioru D zawiera się w zbiorze D. Zbiór gwiaździsty względem punktu $w_0 = 0$ nazywamy zbiorem gwiaździstym. Zbiór $D \subset \mathbb{C}$ nazywamy wypukłym, jeżeli odcinek łączący dowolne dwa punkty zbioru D zawiera się w D. Zbiór wypukły jest gwiaździsty względem każdego swojego punktu.

Niech funkcja f będzie analityczna i jednolistna w U oraz $f(0) = 0$. Wtedy f odwzorowuje koło U na obszar

- gwiaździsty względem punktu w_0 wtedy i tylko wtedy, gdy (patrz [15])

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0, \quad z \in U, \tag{1.1}$$

- wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy (patrz [29])

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0, \quad z \in U. \tag{1.2}$$

Funkcję odwzorowującą koło U na obszar gwiaździsty nazywamy gwiaździstą, natomiast funkcję odwzorowującą koło U na obszar wypukły nazywamy wypukłą w U. Przez $\mathcal{ST}$, odpowiednio przez $\mathcal{CV}$, będziemy oznaczać zbiór funkcji $f \in \mathcal{S}$, które są gwiaździste, odpowiednio wypukłe w U. Dla $r > 0$ niech $U_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Jeżeli f jest wypukła i $U_r \subset U$, to $f(U_r)$ jest wypukły ([29], [20]). Podobnie $f(U_r)$ dla $r \leq 1$ jest gwiaździsty, gdy f jest gwiaździsta.

Robertson w [19] wprowadził klasy $\mathcal{ST}(\alpha)$ i $\mathcal{CV}(\alpha)$ funkcji gwiaździstych i wypukłych rzędu $\alpha < 1$, zdefiniowane warunkami

$$\mathcal{ST}(\alpha) = \left\{f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha, \quad z \in U\right\}, \tag{1.3}$$

$$\mathcal{CV}(\alpha) = \left\{f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha, \quad z \in U\right\}. \tag{1.4}$$

Dla $\alpha \in [0, 1)$ funkcje w obu klasach są jednolistne. Ponadto $\mathcal{ST}(0) = \mathcal{ST}$ oraz $\mathcal{CV}(0) = \mathcal{CV}$. Nie znamy interpretacji geometrycznej funkcji gwiaździstych i wypukłych rzędu α.

B. Pinchuk w liście do Goodmana [4] postawił następujący problem: Niech γ będzie okręgiem zawartym w U i niech ζ będzie środkiem okręgu γ. Jeśli $f \in \mathcal{ST}$, to czy prawdą jest, że $f(\gamma)$ jest krzywą zamkniętą, która jest gwiaździsta względem punktu $f(\zeta)$? W [4] Goodman podał przykład na nie. Niezależnie od Goodmana J.E. Brown w [2] znalazł odpowiedź negatywną na pytanie Pinchuka. Brown rozważał okręgi $\gamma : |z - z_0| = \rho$ leżące w U i dla dowolnego $r \in (0, 1)$ wyznaczał $\sup \rho$ takich, że jeśli f jest funkcją z klasy $\mathcal{S}$ i $|z_0| = r$, gdzie $r + \rho < 1$, to $f(\gamma)$ jest krzywą zamkniętą gwiaździstą względem punktu $f(z_0)$.

Pytanie Pinchuka było inspiracją dla Goodmana ([3],[4]) do wprowadzenia w 1991 roku geometrycznie definiowanych klas $\mathcal{UCV}$ i $\mathcal{UST}$, odpowiednio funkcji jednostajnie wypukłych i jednostajnie gwiaździstych. Funkcja $f \in \mathcal{S}$ jest w klasie $\mathcal{UCV}$ (odpowiednio $\mathcal{UST}$), jeżeli dla każdego łuku kołowego $\gamma \subset U$ o środku w punkcie $\zeta \in U$, łuk $f(\gamma)$ jest wypukły (odpowiednio gwiaździsty względem punktu $f(\zeta)$).

Przypomnimy definicję łuku gwiaździstego i wypukłego. Niech $\gamma : z = z(t), t \in [a, b]$, będzie gładkim, łukiem skierowanym i załóżmy, że funkcja f jest analityczna na γ. Wtedy łuk $f(\gamma)$ nazywamy

- gwiaździstym względem punktu $w_0 \notin f(\gamma)$, jeżeli $\arg(f(z(t)) - w_0)$ jest niemalejącą funkcją względem t,

- wypukłym, jeżeli argument stycznej do $f(\gamma)$ jest niemalejącą funkcją względem t.

W definicji klasy $\mathcal{UCV}$ i $\mathcal{UST}$ rozważamy łuki kołowe γ skierowane dodatnio, czyli gdy z przebiega γ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

2. Funkcje k-jednostajnie wypukłe

W pracy Kanas i Wiśniowska [5] biorąc w definicji funkcji jednostajnie wypukłej ζ takie, że $|\zeta| \le k, k > 0$, otrzymaliśmy naturalne rozszerzenie pojęcia jednostajnej wypukłości: funkcja $f \in \mathcal{S}$ jest k-jednostajnie wypukła w U, jeżeli obraz każdego łuku kołowego $\gamma \subset U$ o środku w punkcie ζ dla $|\zeta| \le k$ jest wypukły. Klasę funkcji k-jednostajnie wypukłych oznaczamy przez k-$\mathcal{UCV}$. Widać, że 0-$\mathcal{UCV} = \mathcal{CV}$ i 1-$\mathcal{UCV} = \mathcal{UCV}$.

Można pokazać (patrz [5]), że

$$f \in k\text{-}\mathcal{UCV} \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{(z-\zeta)f''(z)}{f'(z)} \right\} \ge 0 \quad \text{dla} \quad z \in U, |\zeta| \le k. \tag{2.1}$$

Dla $k = 1$ jest to warunek analityczny dla klasy $\mathcal{UCV}$ uzyskany przez Goodmana, wyrażony przy pomocy dwóch zmiennych zespolonych. W [5] udowodniliśmy, że warunek (2.1) jest równoważny warunkowi

$$f \in k\text{-}\mathcal{UCV} \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} \ge k \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \quad \text{dla} \quad z \in U, |\zeta| \le k, \tag{2.2}$$

który już nie zawiera dwóch zmiennych zespolonych.

Dla $k = 1$ jest to warunek otrzymany przez Ma i Mindę ([10]) oraz niezależnie przez Rønninga ([21]). Otrzymanie warunku (2.2) pozwoliło na intensywne badanie własności funkcji z klasy $\mathcal{UCV}$ (k-$\mathcal{UCV}$) (patrz [10], [11], [21], [5], [7]).

Między klasami $\mathcal{ST}$ i $\mathcal{CV}$ zachodzi związek Alexandera (patrz [1])

$$f \in \mathcal{CV} \;\Leftrightarrow zf'(z) \in \mathcal{ST}.$$

Niech k-$\mathcal{ST}$, $k \ge 0$ oznacza podklasę funkcji gwiaździstych wprowadzoną i badaną w pracy Kanas i Wiśniowska [6] określoną relacją

$$f \in k\text{-}\mathcal{UCV} \;\Leftrightarrow zf'(z) \in k\text{-}\mathcal{ST}.$$

Stąd $f \in \mathcal{A}$ należy do klasy k-$\mathcal{ST}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > k \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right|, \quad z \in U. \tag{2.3}$$

Dla $k = 1$ jest to klasa $\mathcal{S}_p$ wprowadzona i badana przez Rønninga w [21]. Rønning pokazał, że $\mathcal{UST} \not\subset \mathcal{S}_p$ i $\mathcal{S}_p \not\subset \mathcal{UST}$ (patrz [21], [23]).

W pracy [H6]-[8] otrzymaliśmy pewne geometryczne własności funkcji z klasy k-$\mathcal{ST}$. Pokazujemy, że funkcja $f \in \mathcal{S}$ jest w klasie k-$\mathcal{ST}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\zeta}{z} + \frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)} \right\} \ge 0 \quad \text{dla} \quad z \in U, \; |\zeta| \le k.$$

Stąd jako wniosek otrzymujemy, że jeśli $f \in k$-$\mathcal{ST}$, to

$$\operatorname{Re} \frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)} \ge 0$$

dla $z \in U, |\zeta| \leq k$ and $\pi/2 \leq \arg\{\zeta/z\} \leq 3\pi/2$.

Wyniki te pozwalają udowodnić ciekawą geometryczną charakteryzację klasy k-$\mathcal{ST}$ ([H6]-[8]): Niech $U(\zeta, r)$ oznacza koło o środku w punkcie ζ i promieniu r. Jeśli $f \in k$-$\mathcal{ST}$, to f przekształca obszar $U(\zeta, r) \cap U(0, R)$ na obszar gwiaździsty dla każdego ζ, r, R takiego, że $0 < R \leq 1, |\zeta| \leq k, r \geq \sqrt{|\zeta|^2 + R^2}$.

W pracy [H1]-[32] zajmujemy się między innymi problemem znalezienia dolnego ograniczenia $\mathrm{Re}\sqrt{f(z)/z}$ w kole U, gdy f jest w klasie k-$\mathcal{ST}$.

Marx ([9]) wykazał, że jeśli $f \in \mathcal{CV}$, to

$$\mathrm{Re}\sqrt{f'(z)} > \frac{1}{2}, \quad z \in U$$

lub równoważnie

$$f \in \mathcal{ST} \Rightarrow \mathrm{Re}\sqrt{\frac{f(z)}{z}} > \frac{1}{2}, \quad z \in U$$

i oszacowanie jest dokładne.

W pracy [H1]-[32] dowodzimy, że

$$f \in k\text{-}\mathcal{ST} \Rightarrow \mathrm{Re}\sqrt{\frac{f(z)}{z}} > \frac{k+1}{k+2}, \quad z \in U,$$

to jest równoważne

$$f \in k\text{-}\mathcal{UCV} \Rightarrow \mathrm{Re}\sqrt{f'(z)} > \frac{k+1}{k+2}, \quad z \in U.$$

Wynik jest dokładny tylko dla $k = 0$. Aby podać dokładne oszacowanie przypomnijmy, że klasy k-$\mathcal{UCV}$ i k-$\mathcal{ST}$ są związane z obszarami ograniczonymi stożkowymi ([5], [6]):

$$f \in k\text{-}\mathcal{ST} \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in G_k, \quad z \in U,$$

gdzie $1 \in G_k$ i brzegiem obszaru G_k jest krzywa stożkowa

$$\{u + iv : u^2 = k^2(u-1)^2 + k^2v^2\}, \ k \geq 0.$$

Zauważmy, że ∂G_k jest: prawą gałęzią hiperboli dla $k \in (0,1)$, parabolą $v^2 = 2u - 1$ dla $k = 1$ oraz elipsą dla $k > 1$.

Funkcja p_k analityczna i jednolistna w U, taka, że $p_k(0) = 1$ i $p_k(U) = G_k$, wyznacza funkcję ekstremalną dla wielu problemów w klasie k-$\mathcal{ST}$. Wiadomo, że ([10], [21])

$$p_0(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad p_1(z) = 1 + \frac{2}{\pi^2}\left(\log\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)^2, \quad z \in U.$$

W [5] pokazaliśmy, że

$$p_k(z) = \frac{1}{1-k^2}\cosh\left\{\left(\frac{2}{\pi}\arccos k\right)\log\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right\} - \frac{k^2}{1-k^2}, \quad z \in U, \ 0 < k < 1$$

(wybieramy gałąź główną logarytmu, a niejednoznaczność pierwiastka usuwa parzystość funkcji cosinus hiperboliczny),

$$p_k(z) = \frac{1}{k^2-1}\sin\left(\frac{\pi}{2K(\kappa)}\int_0^{\frac{u(z)}{\sqrt{\kappa}}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\kappa^2t^2}}\right) + \frac{k^2}{k^2-1}, \quad z \in U,$$

gdzie

$$u(z) = \frac{z-\sqrt{\kappa}}{1-\sqrt{\kappa}z}, \quad z \in U,\ k > 1$$

oraz $\kappa \in (0,1)$ jest tak dobrane, by $k = \cosh(\pi K'(\kappa)/(4K(\kappa)))$. Tutaj $K(\kappa)$ jest całką eliptyczną zupełną pierwszego rodzaju

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\phi}}$$

i $K'(\kappa) = K(\sqrt{1-\kappa^2})$.

Znane podklasy funkcji jednolistnych można zdefiniować równoważnie za pomocą podporządkowania. Mówimy, że funkcja analityczna f jest podporządkowana funkcji analitycznej g w U, co zapisujemy $f \prec g$ w U, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja analityczna w taka, że $|w(z)| \le |z|$ i $f(z) = g(w(z))$ dla $z \in U$. Funkcja nadrzędna g nie musi być jednolistna. Zatem $f \prec g$ w U implikuje $f(U) \subset g(U)$. Jeżeli g jest jednolistna w U, to

$$f \prec g \text{ w } U \Leftrightarrow [f(0) = g(0) \text{ i } \ f(U_r) \subset g(U_r) \text{ dla } 0 < r \le 1].$$

Można zauważyć, że $f \in k\text{-}\mathcal{ST}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec p_k(z) \ \text{ w } U. \tag{2.4}$$

Jeżeli przez f_k oznaczymy funkcję analityczną spełniającą warunki $f_k(0) = f_k'(0) - 1 = 0$ i $zf_k'(z)/f_k(z) = p_k(z)$, $z \in U$, to wykorzystując podporządkowanie (2.4) otrzymujemy (patrz [H1]-[32])

Twierdzenie 2.1. *Jeżeli $f \in k\text{-}\mathcal{ST}$ dla pewnego $k \ge 0$, to*

$$\operatorname{Re}\sqrt{\frac{f(z)}{z}} > \sqrt{-f_k(-1)} = \exp\left\{\int_0^{-1}\frac{p_k(t)-1}{2t}dt\right\}$$

i oszacowanie jest dokładne.

Ze związku między klasami $k\text{-}\mathcal{UCV}$ i $k\text{-}\mathcal{ST}$ otrzymujemy

$$f \in k\text{-}\mathcal{UCV} \Rightarrow \operatorname{Re}\sqrt{f'(z)} > \exp\left\{\int_0^{-1}\frac{p_k(t)-1}{2t}dt\right\}.$$

Trudno jest obliczyć $\sqrt{-f_k(-1)}$ dla ustalonego k, ale wiemy, że ([H1]-[32])

$$\sqrt{-f_k(-1)} \ge \frac{k+1}{k+2}, \quad k \ge 0.$$

Jedynie dla $k=\sqrt{2}/2$ możemy wyznaczyć

$$p_{\sqrt{2}/2}(z)=\frac{2}{\sqrt{1-z}}-1 \quad \text{co daje} \quad \sqrt{-f_{\sqrt{2}/2}(-1)}=(\sqrt{2}+2)/(\sqrt{2}+4).$$

W danej klasie $\mathcal{F}$ ciekawym i ważnym jest problem znalezienia

$$q(r)=\min\left\{\operatorname{Re}\frac{f(z)}{z} : f\in\mathcal{F}, |z|=r<1\right\}$$

oraz znalezienia promienia $\rho(\beta)$ największego koła $U_{\rho(\beta)}\subset U$, w którym $\operatorname{Re}(f(z)/z)>\beta$ dla wszystkich $f\in\mathcal{F}$. Reade i Silverman [18] otrzymali rozwiązanie tego problemu w klasie $\mathcal{ST}(\alpha)$ dla $\alpha=0$ i $1/2\le\alpha<1$, natomiast trudniejszy przypadek $\alpha\in(0,1/2)$ pozostawili jako problem otwarty. Dla $\alpha\in(0,1/2)$ problem ten został rozwiązany w pracy Wiśniowska [31]. W [H1]-[32] badaliśmy ten problem w klasie k-$\mathcal{ST}$. Wykorzystując teorię punktów ekstremalnych Reade i Silverman otrzymali $q(r)$ w klasie $\mathcal{ST}=0$-$\mathcal{ST}$: dla $|z|=r<1$,

$$\min_{f\in\mathcal{ST}}\operatorname{Re}\frac{f(z)}{z}=\frac{1}{(1+r)^2},\quad 0<r\le 1/2,$$

$$\min_{f\in\mathcal{ST}}\operatorname{Re}\frac{f(z)}{z}=\frac{1-2r^2}{2(1-r^2)^2},\quad 1/2<r<1.$$

W pracy [H1]-[32] otrzymaliśmy

Twierdzenie 2.2. *Jeśli $k\ge 1$, to dla $|z|=r,\ 0<r<1$*

$$\min_{f\in k\text{-}\mathcal{ST}}\operatorname{Re}\frac{f(z)}{z}=\frac{f_k(-r)}{-r}=\exp\left\{\int_0^{-r}\frac{p_k(t)-1}{t}dt\right\}.$$

Stąd jako wniosek otrzymujemy, że jeśli $f\in k$-$\mathcal{ST}$ dla pewnego $k\ge 1$, to

$$\operatorname{Re}\frac{f(z)}{z}>\exp\left\{\int_0^{-1}\frac{p_k(t)-1}{t}dt\right\}\quad \text{dla } z\in U$$

i oszacowanie jest dokładne.

Niech $\mathcal{K}(\mathcal{F})$ oznacza stałą Koebe'go w klasie $\mathcal{F}$, tj.

$$\mathcal{K}(\mathcal{F})=\sup\left\{r\in(0,1): U_r\subset\bigcap_{f\in\mathcal{F}}f(U)\right\}.$$

Przypomnijmy, że $\mathcal{K}(\mathcal{S})=\mathcal{K}(\mathcal{ST})=1/4$ oraz ([6]) $\mathcal{K}(k\text{-}\mathcal{ST})=-f_k(-1)$, w szczególności dla $k=1$ dostajemy wynik z [21]

$$\mathcal{K}(1\text{-}\mathcal{ST})=\exp\left\{-\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\frac{t^2}{\sin t}dt\right\}\simeq 0,534.$$

Twierdzenie 2.3. ([H1]-[32]) *Niech $f\in k$-$\mathcal{ST}$ dla pewnego $k\ge 1$ i niech*

$$\rho(\beta)=\max\{r : \operatorname{Re}f(z)/z>\beta, |z|<r\},\ \mathcal{K}(k\text{-}\mathcal{ST})\le\beta<1.$$

Wtedy $\rho(\beta) = \min\{r_0, 1\}$, *gdzie* r_0 *jest określone równaniem*

$$\log(1/\beta) = \int_0^{r_0} \frac{1 - p_k(-x)}{x} dx.$$

Wynik jest dokładny.

W pracy [H2]-[28] zbadanie własności funkcji p_k pozwoliło częściowo uzupełnić lukę dla $0 < k < 1$ w Twierdzeniu 2.2. Jeżeli $0 < k < 1$, to funkcja p_k jest postaci

$$p_k(z) = \frac{1}{1-k^2} \cosh\left\{\left(\frac{2}{\pi} \arccos k\right) \log \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right\} - \frac{k^2}{1-k^2}, \quad z \in U$$

i w [H2]-[28] udowodniliśmy nierówność

$$\operatorname{Re} \frac{zp_k'(z)}{p_k(z) - 1} > \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \arccos k, \quad z \in U.$$

Ten wynik jest dokładny i pozwolił wykazać, że jeśli $r \in (0,1)$ jest daną liczbą, to funkcja $f_k(z)/z$ jest wypukła w kole $|z| < r$, o ile $k \in (0,1)$ spełnia nierówność

$$\frac{k+3}{k+1} - \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \arccos k < \frac{1}{r}.$$

Następnie wykazaliśmy, że

$$\min\left\{\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} : f \in k\text{-}\mathcal{ST}, |z| = r\right\} = \frac{f_k(-r)}{-r},$$

przy odpowiednich $k \in (0,1)$, $r = r(k) < 1$. W szczególności otrzymaliśmy

Twierdzenie 2.4. *Niech* $f \in k\text{-}\mathcal{ST}$ *dla pewnego* $k \geq k_0$, *gdzie* k_0 *jest jedynym w przedziale* $(1/2, \sqrt{2}/2)$ *rozwiązaniem równania*

$$\arccos k = \frac{\pi\sqrt{1-k^2}}{(1+k)^2}.$$

Wtedy

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > -f_k(-1) \quad \text{dla } z \in U.$$

Dla ustalonej klasy $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ liczbę

$$\alpha^*(\mathcal{G}) = \sup\{\alpha \in [0,1) : \mathcal{G} \subset \mathcal{ST}(\alpha)\}$$

nazywamy rzędem gwiaździstości klasy $\mathcal{G}$.

Wiadomo, że $\alpha^*(\mathcal{CV}) = 1/2$ czyli każda funkcja wypukła jest gwiaździsta rzędu 1/2. W pracy [H5]-[35] otrzymujemy następujące

Twierdzenie 2.5. *Jeżeli* $f \in k\text{-}\mathcal{UCV}$ *dla pewnego* $k \geq 0, k \neq 1$, *to* $f \in \mathcal{ST}(\beta(k))$, *gdzie*

$$\beta(k) = \frac{\frac{1-k}{k+1}}{2^{\frac{2}{k+1}}(1 - 2^{\frac{k-1}{k+1}})}.$$

Liczba $\beta(k)$ nie jest najlepszą możliwą. Lepszy wynik uzyskamy wykorzystując ([14])

Lemat 2.5. *Niech h będzie funkcją analityczną w U, $h(0)=1$ i niech $q, q(0)=1$, spełnia równanie różniczkowe*

$$q(z)+\frac{zq'(z)}{q(z)}=h(z), \quad z\in U.$$

Jeśli założymy, że h jest wypukła w U i $\operatorname{Re} q(z)>0, z\in U$, wtedy q jest jednolistna i jest określona przez

$$q(z)=\frac{zk'(z)}{k(z)},\ k(z)=\int_0^z \frac{g(t)}{t}dt \text{ i } \ g(z)=z\exp\left(\int_0^z \frac{h(t)-1}{t}dt\right).$$

Ponadto, jeśli f jest analityczna w U, $f(0)=0$ i $1+zf''(z)/f'(z)\prec h(z)$ w U, to $zf'(z)/f(z)\prec q(z)$ w U. Wynik jest dokładny i funkcją ekstremalną jest $f=k$.

Jeśli $f\in k\text{-}\mathcal{UCV}$, to korzystając z podporządkowania

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\prec p_k(z) \text{ w } U$$

i z Lematu 2.5 otrzymujemy ([H5]-[35]) następujące oszacowanie rzędu gwiaździstości klasy funkcji k-jednostajnie wypukłych

Twierdzenie 2.6. *Jeżeli $k\ge\sqrt{2}/2$, to*

$$\alpha^*(k\text{-}\mathcal{UCV})\ge\frac{6}{3+4\sqrt{2}}=0,69309\ldots$$

Równość zachodzi dla $k=\sqrt{2}/2$.

Rząd gwiaździstości klasy $\mathcal{UCV}$ znaleziono w [30].

3. Funkcje k-jednostajnie gwiaździste

W pracy [H3]-[33] wprowadzone zostało pojęcie k-jednostajnej gwiaździstości. Ustalmy $0\le k\le 1$. Funkcja $f\in\mathcal{S}$ jest k-jednostajnie gwiaździsta w U, jeżeli obraz dowolnego łuku kołowego γ zawartego w U, o środku w punkcie ζ, gdzie $|\zeta|\le k$, jest gwiaździsty względem $f(\zeta)$.

Klasę wszystkich funkcji k-jednostajnie gwiaździstych będziemy oznaczać przez $k\text{-}\mathcal{UST}$. Zauważmy, że dla $k=0$ otrzymujemy klasę $\mathcal{ST}$ funkcji gwiaździstych, natomiast dla $k=1$ klasę $\mathcal{UST}$ funkcji jednostajnie gwiaździstych ([4]). Ponadto dla każdego $k\in[0,1]$ zachodzi $\mathcal{UST}\subset k\text{-}\mathcal{UST}\subset\mathcal{ST}$.

Przypomnijmy, że jeśli łuk γ jest dany równaniem $\gamma: z=z(t)$, to łuk $f(\gamma)$ jest gwiaździsty względem punktu w_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{d}{dt}\arg\left(f(z(t)-w_0\right)\ge 0.$$

Warunek ten jest równoważny warunkowi ([3])

$$\operatorname{Im}\left[\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}\frac{dz}{dt}\right]\ge 0$$

dla z na γ. Dla łuku kołowego $\gamma : z = \zeta + re^{it}$ mamy $z'(t) = ire^{it} = i(z-\zeta)$, stąd dla $w_0 = f(\zeta)$ dostajemy

$$\operatorname{Im}\left[\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}\frac{dz}{dt}\right] = \operatorname{Re}\frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)-f(\zeta)}.$$

Zatem otrzymujemy następujący warunek analityczny k-jednostajnej gwiaździstości ([H3]-[33])

$$f \in k\text{-}\mathcal{UST} \Leftrightarrow \operatorname{Re}\frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)-f(\zeta)} \geq 0 \quad \text{dla} \quad z \in U,\ |\zeta| \leq k. \tag{3.1}$$

Widać, że jeśli $k = 0$, to $\zeta = 0$ i jest to warunek (1.1), natomiast dla $k = 1$ jest to warunek jednostajnej gwiaździstości otrzymany przez Goodmana w [4].

Wiele prac dotyczących funkcji jednostajnie wypukłych i pewnych ich uogólnień zostało napisanych, natomiast niewiele jest prac dotyczących funkcji jednostajnie gwiaździstych. Wynika to stąd, że badanie tych funkcji jest o wiele trudniejsze ze względu na warunek analityczny, który zawiera dwie zmienne zespolone, co prowadzi do skomplikowanych obliczeń. Trudno jest nawet sprawdzić, czy "prosta" funkcja jest jednostajnie gwiaździsta.

Goodman w [4] pokazał, że

$$\frac{z}{1-Az} \in \mathcal{UST} \Leftrightarrow |A| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(|A| \leq \frac{\sqrt{2}}{2n}, n > 1\right) \Rightarrow z + Az^n \in \mathcal{UST}.$$

W poniższych twierdzeniach przedstawiamy przykłady funkcji należących do klasy k-$\mathcal{UST}$ (patrz [H3]-[33]).

Twierdzenie 3.1. *Niech* $0 \leq k \leq 1$. *Wtedy*

$$\frac{z}{1-Az} \in k\text{-}\mathcal{UST} \Leftrightarrow |A| \leq \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Goodman wspomniał w [4] (ale bez dowodu), że funkcja $f(z) = z + Az^2,\ z \in U$, jest w klasie $\mathcal{UST}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| \leq \sqrt{3}/4$. Wynik ten został udowodniony w [H3]-[33] i uogólniony na klasę k-$\mathcal{UST}$.

Twierdzenie 3.2. *Niech* $0 \leq k \leq 1$. *Wtedy*

$$f(z) = z + Az^2 \in k\text{-}\mathcal{UST} \Leftrightarrow |A| \leq \sqrt{3}/\sqrt{4(k^2+3)}.$$

Twierdzenie 3.3. *Niech* $0 \leq k \leq 1$ *i niech dla pewnej liczby naturalnej* $n \geq 2$

$$f(z) = z + Az^n,\ z \in U.$$

Jeżeli

$$|A| \leq \frac{1}{n}\sqrt{\frac{n+1}{n+1+(n-1)k^2}},$$

to $f \in k$-$\mathcal{UST}$.

Dla $k = 0$ jest to warunek wystarczający na to, aby funkcja $f(z) = z + Az^n$, $z \in U$, była w klasie $\mathcal{ST}$. Dla $k = 1$ jest to wynik otrzymany przez Merkesa i Salmassi ([13]), który poprawia rezultat Goodmanna $|A| \le 1/(\sqrt{2}n)$. Oszacowanie w Twierdzeniu 3.3 nie jest najlepsze z możliwych, oprócz przypadku $n = 2$ (patrz Twierdzenie 3.2) i gdy $k = 0$.

Dla danych podklas $\mathcal{G}$ i $\mathcal{F}$ klasy $\mathcal{A}$ liczbę

$$\sup\{r_0 : (1/r)f(rz) \in \mathcal{G} \text{ dla } r \le r_0, f \in \mathcal{F}\}$$

nazywamy promieniem klasy $\mathcal{G}$ w klasie $\mathcal{F}$.

Wiadomo, że każda funkcja wypukła jest gwiaździsta, stąd promień gwiaździstości klasy $\mathcal{CV}$ jest równy 1. Merkes i Salmassi ([13]) i niezależnie Rønning ([23]) wykazali, że

$$f \in \mathcal{CV} \Rightarrow \sqrt{2}f(z/\sqrt{2}) \in \mathcal{UST}$$

i liczba $1/\sqrt{2}$ jest promieniem jednostajnej gwiaździstości w klasie $\mathcal{CV}$.

Problem znalezienia promienia k-jednostajnej gwiaździstości w klasie funkcji wypukłych został rozwiązany w kolejnym twierdzeniu

Twierdzenie 3.4 ([H3]-[33]) *Niech $0 < k \le 1$. Jeżeli $f \in \mathcal{CV}$, to funkcja*

$$U \ni z \mapsto (1/r_k)\, f(r_k z),$$

gdzie $r_k = 1/\sqrt{1+k^2}$, należy do klasy k-$\mathcal{UST}$. Liczba r_k jest promieniem k-jednostajnej gwiaździstości w klasie $\mathcal{CV}$.

Zauważmy, że dla $k = 0$ i $k = 1$ otrzymujemy odpowiednio przypomniane powyżej promienie klasy $\mathcal{ST}$ i klasy $\mathcal{UST}$ w klasie $\mathcal{CV}$.

Klasę k-$\mathcal{UST}$ można też określić wykorzystując splot funkcji. Jeżeli

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \; z \in U,$$

to splot lub iloczyn Hadamarda funkcji f i g jest określony jako

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n, \; z \in U.$$

W [H3]-[33] wykazaliśmy, że funkcja $f \in \mathcal{S}$ jest w klasie k-$\mathcal{UST}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\operatorname{Re} \frac{f(z) * \frac{z}{(1-\alpha z)(1-kz)}}{f(z) * \frac{z}{(1-\alpha z)^2}} \ge 0 \quad \text{dla wszystkich } z \in U, \; |\alpha| \le 1.$$

Ruscheweyh w [25] wprowadził pojęcie zbioru dualnego i zasady dualności. Dla dowolnego zbioru $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}$ definiujemy jego zbiór dualny jako

$$\mathcal{V}^* = \{g \in \mathcal{S} : \forall f \in \mathcal{V}; (f * g)(z)/z \ne 0 \; w \; U\},$$

i $\mathcal{V}^{**} = (\mathcal{V}^*)^*$, jako drugi dualny (dualną otoczkę $\mathcal{V}$). Ważna "zasada dualności" mówi, że pod pewnymi nie zawsze silnymi założeniami o $\mathcal{V}$, wiele liniowych(i innych) ekstremalnych problemów dla $\mathcal{V}^{**}$ można rozwiązać w $\mathcal{V}$. W wielu ciekawych przypadkach zbiór $\mathcal{V}^{**}$ jest znacznie obszerniejszy niż zbiór $\mathcal{V}$.

W pracy [H4]-[34] otrzymaliśmy następującą charakterystykę klasy k-$\mathcal{UST}$

Twierdzenie 3.5 *Niech* $0 \le k \le 1$. *Wtedy* k-$\mathcal{UST} = \Omega_k^*$, *gdzie*

$$\Omega_k = \left\{ g \in \mathcal{S} : g(z) = \frac{z}{2}\left[\frac{\epsilon+1}{(1-z)^2} - \frac{\epsilon-1}{(1-z)(1-\omega z)}\right],\ |\epsilon| = 1,\ |\omega| = k \right\}.$$

Dla $k = 0$ dostajemy rezultat otrzymany w [27], mianowicie

$$\mathcal{ST} = \Omega_0^*, \quad \text{gdzie} \ \ \Omega_0 = \left\{ g \in \mathcal{S} : g(z) = \frac{z}{2}\left[\frac{\epsilon+1}{(1-z)^2} - \frac{\epsilon-1}{1-z}\right],\ |\epsilon| = 1 \right\}.$$

Dla $k = 1$ otrzymujemy zbiór, do którego klasa $\mathcal{UST}$ jest dualna (patrz ([16]).

Dla każdego $k \in [0, 1]$ zachodzi relacja $\mathcal{UST} \subset k$-$\mathcal{UST} \subset \mathcal{ST}$. Rønning [24] pokazał, że $\mathcal{UST} \not\subset \mathcal{ST}(1/2)$ i postawił następujący problem: znaleźć największe $\alpha \ge 0$ takie, że $\mathcal{UST} \subset \mathcal{ST}(\alpha)$. Nezhmetdinov w [17] otrzymał częściowe rozwiązanie tego problemu. Wykorzystując technikę dualności udowodnił, że jeśli $\alpha > \alpha_0 = 0.1483\ldots$, to $\mathcal{UST} \not\subset \mathcal{ST}(\alpha)$. Ograniczenie α_0 dostajemy ze skomplikowanego procesu liczenia maksimum funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych i α_0 jest najlepszym wynikiem jaki można policzyć wykorzystując metodę zbiorów dualnych. Jak dotąd nie wiadomo, czy istnieje $\alpha > 0$ takie, że $\mathcal{UST} \subset \mathcal{ST}(\alpha)$.

W [27] udowodniono, że $\mathcal{ST}(\alpha) = \Psi^*$, gdzie

$$\Psi = \left\{ g \in \mathcal{S} : g(z) = z\,\frac{2(1-\alpha) + (\eta + 2\alpha - 1)z}{2(1-\alpha)(1-z)^2},\ |\eta| = 1 \right\}.$$

W pracy [H4]-[34] wykorzystując technikę zbiorów dualnych (patrz [26]) dostajemy

$$k\text{-}\mathcal{UST} \subset \mathcal{ST}(\alpha) \Rightarrow \Omega_k^* \subset \Psi^*$$

oraz

$$\Omega_k^* \subset \Psi^* \Rightarrow \lambda(\Psi) \subset \lambda(cm\Omega_k),$$

dla każdego ciągłego funkcjonału liniowego λ, gdzie

$$cmV = \left\{ \frac{g(xz)}{x} : g \in V, |x| \le 1 \right\}.$$

Wykorzystując to wykazaliśmy następujące

Twierdzenie 3.6.([H4]-[34]) *Jeżeli* $0 \le k < 1$, *to nie istnieje liczba dodatnia* α *taka, że* k-$\mathcal{ST} \subset \mathcal{ST}(\alpha)$.

Ten rezultat mógłby sugerować, że to samo jest prawdą dla $k = 1$, to znaczy, że $\mathcal{UST}$ nie zawiera się w $\mathcal{ST}(\alpha)$ dla żadnego $\alpha > 0$. Jednakże przejście w dowodzie Twierdzenia 3.6 do $k = 1$ nie jest ciągłe. Zatem wynik Nezhmetdinova $\mathcal{UST} \not\subset \mathcal{ST}(0.1483)$ jest nadal najlepszy dla klasy $\mathcal{UST}$.

4. Warunek wystarczający jednostajnej gwiaździstości

Jak już podkreślaliśmy, trudno jest badać klasy $\mathcal{UST}$ (k-$\mathcal{UST}$), bo warunek (3.1) zawiera dwie zmienne zespolone. W szczególności sprawdzenie, czy funkcja f należy do klasy $\mathcal{UST}$ prowadzi do skomplikowanych rozważań. Stąd znane są tylko proste przykłady funkcji jednostajnie gwiaździstych.

W pracy [H7]-[37] podajemy ciekawe przykłady funkcji w klasie $\mathcal{UST}$ i ustalamy jej związek z pewnymi podklasami funkcji wypukłych. W szczególności dowodzimy, że każda funkcja wypukła rzędu 3/4 jest jednostajnie gwiaździsta.

Można zauważyć, że

$$\int_0^1 f'(tz+(1-t)\zeta)dt = \int_\zeta^z \frac{f'(u)}{z-\zeta}du = \frac{1}{z-\zeta}\int_\zeta^z f'(u)du = \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}.$$

Stąd dostajemy następującą charakteryzację klasy $\mathcal{UST}$

$$f \in \mathcal{UST} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{f'(z)}\int_0^1 f'(tz+(1-t)\zeta)dt\right\} \geq 0 \quad \text{dla} \quad z \in U, \zeta \in U.$$

Jeśli $z, \zeta \in U$ i $t \in [0,1]$, to $tz + (1-t)\zeta = w \in U$. Zatem

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{f'(z)}\int_0^1 f'(tz+(1-t)\zeta)dt\right\} = \mathrm{Re}\int_0^1 \frac{f'(w)}{f'(z)}dt = \int_0^1 \mathrm{Re}\,\frac{f'(w)}{f'(z)}dt.$$

Wykorzystując to Merkes i Salmassi ([13]) udowodnili następujące

Twierdzenie 4.1. *Niech $f \in \mathcal{S}$. Jeżeli dla dowolnych $z \in U$, $w \in U$*

$$\mathrm{Re}\,\frac{f'(w)}{f'(z)} \geq 0,$$

to $f \in \mathcal{UST}$.

W oparciu o ten rezultat w pracy [H7]-[37] dowodzimy następujący warunek wystarczający jednostajnej gwiaździstości:

Twierdzenie 4.2. *Niech $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $z \in U$. Jeżeli*

$$|\mathrm{Arg} f'(z)| \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{dla} \quad z \in U,$$

to $f \in \mathcal{UST}$.

Dotąd znane były nieliczne i bardzo proste przykłady funkcji jednostajnie gwiaździstych, jak homografie i dwumiany. Wynik z Twierdzenia 4.2 generuje wiele przykładów funkcji jednostajnie gwiaździstych [H7]-[37].

Przykład 4.1. Niech

$$P_1(z) = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}, \quad z \in U.$$

Wtedy $P_1(U) = \{w \in \mathbb{C} : |\mathrm{Arg}\, w| < \pi/4\}$.

Jeśli $f_1'(z) = P_1(z)$, to w oparciu o Twierdzenie 4.2, $f_1 \in \mathcal{UST}$. Zatem funkcja

$$f_1(z) = 2\arctan\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} - \sqrt{1-z^2} + 1 - \frac{\pi}{2}, \quad z \in U,$$

jest jednostajnie gwiaździsta w U.

Przykład 4.2. Niech

$$P_2(z) = 1 + \frac{2}{\pi^2}\left(\log\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)^2, \quad z \in U.$$

Ta funkcja odgrywa ważną rolę w klasie $\mathcal{UCV}$ wszystkich funkcji jednostajnie wypukłych. Wiadomo ([10], [21]), że $f \in \mathcal{UCV}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec P_2(z) \ \text{ w } \ U.$$

Obrazem koła jednostkowego U poprzez P_2 jest obszar ograniczony parabolą

$$\{w = u + iv : v^2 = 2u - 1\}.$$

Ponadto $|\mathrm{Arg}P_2(z)| < \pi/4$ dla $z \in U$. Zatem $f_2'(z) = P_2(z)$ dla $z \in U$, implikuje $f_2 \in \mathcal{UST}$.

Wykorzystując standardowe metody całkowania dostajemy

$$f_2(z) = z + \frac{2}{\pi^2}\left[(z-1)\left(\log\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)^2 + 4\sqrt{z}\left(\log\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right) + 4\log(1-z)\right], \ z \in U,$$

stąd f_2 należy do klasy $\mathcal{UST}$.

Przykład 4.3. Niech

$$P_3(z) = \frac{1+Az}{1-Az}, \quad z \in U,$$

gdzie $0 < A \le \sqrt{2} - 1$.

Wtedy P_3 odwzorowuje U na koło

$$\left\{w \in \mathbb{C} : \left|w - \frac{1+A^2}{1-A^2}\right| < \frac{2A}{1-A^2}\right\}.$$

Dla $0 < A \le \sqrt{2} - 1$ koło $P_3(U)$ jest zawarte w obszarze $\{w \in \mathbb{C} : |\mathrm{Arg}\, w| < \pi/4\}$. Stąd jeśli $f_3'(z) = P_3(z)$, to $f_3 \in \mathcal{UST}$, gdyż $|\mathrm{Arg}f_3'(z)| < \pi/4$ dla $z \in U$.

Zatem funkcja

$$f_3(z) = -z - \frac{2}{A}\log(1 - Az), \ z \in U \quad \text{dla} \ \ 0 < A \le \sqrt{2} - 1,$$

jest w klasie $\mathcal{UST}$.

Przykład 4.4. Niech
$$P_4(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}}, \quad z \in U.$$
Ta funkcja przekształca koło jednostkowe na obszar ograniczony hiperbolą
$$\{w = u + iv : u^2 - v^2 = 1/2, u > 0\}$$
i stąd $P_4(U) \subset \{w \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg} w| < \pi/4\}$. Zatem
$$f_4(z) = 2 - 2\sqrt{1-z} = z + \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 4} z^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 4 \cdot 6} z^3 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} z^4 + \dots$$
jest jednostajnie gwiaździsta w U, gdyż $f_4'(z) = P_4(z)$ dla $z \in U$.

Przykład 4.5. Niech
$$P_5(z) = \sqrt{1+z}, \quad z \in U.$$
Obrazem koła jednostkowego U poprzez funkcję P_5 jest obszar ograniczony lemniskatą
$$\{w = u + iv : (u^2 + v^2)^2 - 2(u^2 - v^2) = 0, u > 0\},$$
stąd $P_5(U) \subset \{w \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg} w| < \pi/4\}$. Zatem funkcja
$$f_5(z) = \frac{2}{3}\left[(1+z)^{3/2} - 1\right] = z + \frac{1}{4} z^2 - \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 6} z^3 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 8} z^4 - \dots, \quad z \in U,$$
należy do klasy $\mathcal{UST}$, ponieważ $f_5'(z) = P_5(z)$ dla $z \in U$.

Niech φ będzie funkcją analityczną i jednolistną w U, która spełnia następujące warunki: $\operatorname{Re} \varphi(z) > 0$ dla $z \in U$, $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) > 0$ oraz $\varphi(U)$ jest obszarem wypukłym symetrycznym względem osi rzeczywistej.

Przez $\mathcal{CV}(\varphi)$, odpowiednio przez $\mathcal{ST}(\varphi)$, oznaczamy podklasę funkcji wypukłych, odpowiednio gwiaździstych, zdefiniowaną warunkiem
$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \varphi(z) \quad \text{w} \quad U,$$
odpowiednio
$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi(z) \quad \text{w} \quad U.$$
Klasy $\mathcal{CV}(\varphi)$ i $\mathcal{ST}(\varphi)$ były rozważane w [12], gdzie otrzymano wiele wyników dla funkcji w tych klasach, m. in. oszacowanie modułu funkcji, oszacowanie modułu pochodnej, twierdzenie o pokryciu.

Zauważmy, że
$$\mathcal{CV} = \mathcal{CV}(\varphi_0),\ \mathcal{ST} = \mathcal{ST}(\varphi_0) \quad \text{gdzie} \quad \varphi_0(z) = \frac{1+z}{1-z},$$
$$\mathcal{UCV} = \mathcal{CV}(\varphi_1),\ \mathcal{S}_p = \mathcal{ST}(\varphi_1) \quad \text{gdzie} \quad \varphi_1(z) = 1 + \frac{2}{\pi^2}\left(\log \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)^2,$$
natomiast dla
$$\varphi_2(z) = \frac{1 + (1-2\alpha)z}{1-z}, \quad 0 \le \alpha < 1,$$

otrzymujemy klasy funkcji wypukłych i gwiaździstych rzędu α, czyli

$$\mathcal{CV}(\varphi_2) = \mathcal{CV}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{S} : \mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha,\ z \in U \right\},$$

$$\mathcal{ST}(\varphi_2) = \mathcal{ST}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{S} : \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha,\ z \in U \right\}.$$

Niech k_φ będzie funkcją analityczną w kole U, określoną następującymi warunkami $k_\varphi(0) = k'_\varphi(0) - 1 = 0$ oraz

$$1 + \frac{zk''_\varphi(z)}{k'_\varphi(z)} = \varphi(z).$$

W pracy [H7]-[37] podaliśmy związek klasy $\mathcal{CV}(\varphi)$ z klasą $\mathcal{UST}$. Widać, że $k_\varphi(z) \in \mathcal{CV}(\varphi)$ i jeśli $f \in \mathcal{CV}(\varphi)$, to można pokazać (patrz [H7]-[37]), $f' \prec k'_\varphi$ w U i w konsekwencji otrzymać następujące

Twierdzenie 4.3. *Niech $f \in \mathcal{CV}(\varphi)$. Jeżeli*

$$\left| \mathrm{Arg}\left\{ \exp \int_0^z \frac{\varphi(t) - 1}{t} dt \right\} \right| \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{dla} \quad z \in U,$$

to $f \in \mathcal{UST}$.

Twierdzenie to można zapisać w równoważnej postaci

$$\mathcal{CV}(\varphi) \subset \mathcal{UST},$$

o ile

$$\left| \mathrm{Im} \int_0^z \frac{\varphi(t) - 1}{t} dt \right| \leq \frac{\pi}{4}, \quad z \in U.$$

Jeżeli $f \in \mathcal{CV}(\alpha)$, to można pokazać, że (patrz [H7]-[37]) $f \in \mathcal{UST}$ dla $3/4 \leq \alpha < 1$, czyli

$$\mathcal{CV}(3/4) \subset \mathcal{UST}.$$

Natomiast, gdy $f \in \mathcal{CV}(\varphi_3)$, gdzie $\varphi_3(z) = 1 + Az$, to ([H7]-[37]) $f \in \mathcal{UST}$ dla $0 < A \leq \pi/4$, czyli

$$\mathcal{CV}(\varphi_3) \subset \mathcal{UST} \quad \text{dla} \quad 0 < A \leq \pi/4.$$

Stąd łatwo otrzymać następujący

Wniosek 4.1. ([H7]-[37]) *Niech $f \in \mathcal{S}$. Jeżeli*

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{\pi}{4}, \quad z \in U,$$

to $f \in \mathcal{UST}$.

5. Podsumowanie

Prace [H1], [H2], [H5] i [H6] z listy prac stanowiących osiągnięcie naukowe (czyli [32], [28], [35], [8]) dotyczą funkcji k-jednostajnie wypukłych.

W [H1]-[32] rozwiązany został problem znalezienia dolnego ograniczenia $\operatorname{Re}\sqrt{f'(z)}$ w kole U, gdy f jest w klasie k-$\mathcal{UCV}$ i otrzymano wynik dokładny. Następnie badano problem znalezienia $\min\{\operatorname{Re} f(z)/z : f \in k\text{-}\mathcal{ST}, |z| = r < 1\}$ oraz znalezienia promienia $\rho(\beta)$ największego koła $U_{\rho(\beta)} \subset U$, w którym $\operatorname{Re}(f(z)/z) > \beta$ dla wszystkich $f \in k$-$\mathcal{ST}$. Otrzymano rozwiązanie tego problemu dla $k \geq 1$. W pracy [H2]-[28] zbadanie własności funkcji p_k pozwoliło wykazać, że przy odpowiednich $k \in (0,1)$, $r = r(k) < 1$ mamy $\min\{\operatorname{Re} f(z)/z : f \in k\text{-}\mathcal{ST}, |z| = r\} = -f_k(-r)/r$. Ze względu na relację typu Alexandra między klasami k-$\mathcal{ST}$ i k-$\mathcal{UCV}$ wyniki otrzymane w klasie k-$\mathcal{ST}$ można odpowiednio przenieść na wyniki w klasie k-$\mathcal{UCV}$. W pracy [H6]-[8] udowodniono ciekawe geometryczne własności funkcji z klasy k-$\mathcal{ST}$. W [H5]-[35] otrzymano pewne oszacowania rzędu gwiaździstości klasy k-$\mathcal{UCV}$ i dokładną wartość rzędu gwiaździstości klasy k-$\mathcal{UCV}$ dla $k = \sqrt{2}/2$.

Prace [H3], [H4] i [H7] z listy prac stanowiących osiągnięcie naukowe (czyli [33], [34], [37]) dotyczą funkcji k-jednostajnie gwiaździstych.

W [H3]-[33] wprowadzona została geometryczna definicja k-jednostajnej gwiaździstości funkcji. Wyprowadzono warunek analityczny dla funkcji w klasie k-$\mathcal{UST}$, podano proste przykłady funkcji k-jednostajnie gwiaździstych i wyznaczono promień k-jednostajnej gwiaździstości w klasie funkcji wypukłych. W pracy [H4]-[34] rozwiązano następujący problem: znaleźć największe $\alpha \geq 0$ takie, że $\mathcal{UST} \subset \mathcal{ST}(\alpha)$. Podano zbiór, do którego klasa k-$\mathcal{UST}$ jest dualna i wykorzystując technikę zbiorów dualnych udowodniono, że gdy $k \in [0,1)$, to nie istnieje liczba dodatnia α taka, że k-$\mathcal{ST} \subset \mathcal{ST}(\alpha)$. W [H7]-[37] udowodniono prosty warunek wystarczający jednostajnej gwiaździstości, co pozwoliło otrzymać nowe ciekawe przykłady funkcji jednostajnie gwiaździstych. Ustalono również, jaki warunek musi spełniać funkcja φ, aby klasa $\mathcal{CV}(\varphi)$ była zawarta w klasie $\mathcal{UST}$ i podano odpowiednie przykłady.

References

[1] J.W. Alexander, *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Annals of Math. **17** (1915), 12–22.

[2] J.E. Brown, *Images of disks under convex and starlike functions*, Math. Zeit. **202(4)** (1989), 457–462.

[3] A.W. Goodman, *On uniformly convex functions*, Ann. Polon. Math. **56(1)** (1991), 87–92.

[4] A.W. Goodman, *On uniformly starlike functions*, J. Math. Anal. Appl. **155** (1991), 364–370.

[5] S. Kanas, A. Wiśniowska, *Conic regions and k-uniform convexity*, J. Comput. Appl. Math. **105** (1999), 327–336.

[6] S. Kanas, A. Wiśniowska, *Conic regions and k-starlike functions*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **45** (2000), 647–657.

[7] S. Kanas, A. Wiśniowska, *Conic regions and k-uniform convexity II*, Folia Sci. Tech. Resov. **22** (1998), 65–78.

[8] A. Lecko, A. Wiśniowska, *Geometric properties of subclasses of starlike functions*, J. Comput. Appl. Math., **155** (2003),383–387

[9] A. Marx, *Untersuchungen über schlichte Abbildungen*, Math. Ann. **107** (1932/33), 40–67.

[10] W. Ma, D. Minda, *Uniformly convex functions*, Ann. Polon. Math. **57(2)** (1992), 165–175.

[11] W. Ma, D. Minda, *Uniformly convex functions II*, Ann. Polon. Math. **58** (1993), 275–285.

[12] W. Ma, D. Minda, *A unified treatment of some special classes of univalent functions*, In: Z. Li, F. Ren, L. Yang and S. Zhang, Eds., Proceeding of Conference on Complex Analysis, International Press, New York (1994), 157–169.

[13] E. Merkes, M. Salmassi, *Subclasses of uniformly starlike functions*, Internat. J. Math. & Math. Sci. **15** (1992), 449–454.

[14] P.T. Mocanu, V. Anisiu, I. Serb, *A sharp criterion for starlikeness*, Indian J. Pure Appl. Math. **27(1)** (1996), 1111–1117.

[15] R. Nevanlinna, Über die konforme Abbildund Sterngebieten, Oversikt av Finska–Vetenskaps Societen Forhandlingar, 63(A)6(1921), 48–403.

[16] I. R. Nezhmetdinov, *Classes of uniformly convex and uniformly starlike functions as dual sets,* J. Math. Anal. Appl. **216**, (1997), 40–47.

[17] I. R. Nezhmetdinov, *On the order of starlikeness of the class UST,* J. Math. Anal. Appl. **234**, (1999), 559–566.

[18] M.O. Reade, H. Silverman, *Radii problems for linear properties of univalent functions*, Houston J. Math. **17(2)** (1991), 227–235.

[19] M. S. Robertson, Certain classes of starlike functions, Michigan Math. Jour., 76, no.1,(1954), 755–758.

[20] M.S. Robertson, *On the theory of univalent functions*, Ann. of Math. **37** (1936), 374–408.

[21] F. Rønning, *Uniformly convex functions and a corresponding class of starlike functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **118**, (1993), 189–196.

[22] F. Rønning, *On starlike functions associated with parabolic regions*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A, **45** (1991), 117–122.

[23] F. Rønning, *On uniformly starlikeness and related properties of univalent functions*, Complex Variables **24** (1994), 233–239.

[24] F. Rønning, *Some radius results for univalent functions,* J. Math. Anal. Appl. **194**, (1995), 319–327.

[25] St. Rusheweyh, Convolution in Geometric Function Theory; Les Presses de l'Univ. de Montreal 1982.

[26] St. Ruscheweyh, *Duality for Hadamard products with applications to extremal problems for functions regular in the unit disc,* Trans. Amer. Math. Soc. **210**, (1975), 63–74.

[27] H. Silverman, E. M. Silvia and D. Telage, *Convolution conditions for convexity, starlikeness and spiral-likeness,* Math. Z. **162**, (1978), 125–130.

[28] J. Sokół A. Wiśniowska-Wajnryb, *On certain problem in the class of k-starlike functions*, **62** (2011), 4733–4741.

[29] E. Study, *Abbildung einfachzusammenhängender Bereiche*, Vorlesungen über ausgwählte Gegenstände der Geometrie, Heft 2, Teubner, Leipzig, 1913.

[30] R. Szász, P.A. Kupan, *The exact order of starlikeness of uniformly convex functions*, Comput. Math. Appl. **62** (2011), 173–186.

[31] A. Wiśniowska, *Extremal properties for closed convex hulls of some subclasses of univalent functions*, Folia Sci. Technic. Resov. **15** (1994), 85–92.

[32] A. Wiśniowska-Wajnryb, *Some extremal bounds for subclasses of univalent functions*, Appl. Math. Comput. **215** (2009), 2634–2641.

[33] A. Wiśniowska-Wajnryb, *On classes of uniformly starlike functions*, Ann. Polon. Math. **108.1**, (2013), 11–19.

[34] A. Wiśniowska-Wajnryb, *The order of starlikeness of the class of uniformly starlike functions*, Math. Nachr. **289**, No. 16, (2016), 2083–2088.

[35] A. Wiśniowska-Wajnryb, *The order of starlikeness of uniformly convex functions*, J. Appl. Anal. **23(1)** (2017), 33–38.

[36] A. Wiśniowska-Wajnryb, *A survey on k-uniformly starlike functions*, Current Research in Mathematical and Computer Sciences, Publisher UWM, Olsztyn, (2017), 225–232.

[37] A. Wiśniowska-Wajnryb, *On a simple sufficient condition for the uniform starlikeness*, Bulletin of the Malaysia Mathematical Sciences Society, przyjęta do druku.

5. Lista publikacji nie wchodzących w skład osiągnięcia naukowego

[1] Stankiewicz J., Wiśniowska A., *On geometric interpretations for some subclasses of univalent functions*, Zesz. Nauk. Politech. Rzesz. 103, Math. Fiz. 16 (1992), 5–9

[2] Sokół J., Wiśniowska A., *On some classes of starlike functions related with parabola*, Zesz. Nauk. Politech. Rzesz. 121, Math. Fiz. 18 (1993), 35–42

[3] Wiśniowska A., *Extremal properties for closed convex hulls of some subclasses of univalent functions*, Zesz. Nauk. Politech. Rzesz. 127, Math. 15 (1994), 85–92

[4] Wiśniowska A., *Relations between special subclasses of starlike functions*, Zesz. Nauk. Politech. Rzesz. 129, Math. 16 (1994), 79–89

[5] Wiśniowska A., *On convex functions related with parabola*, Zesz. Nauk. Politech. Rzesz. 139, Math. 18 (1995), 49–55

[6] Stankiewicz J., Wiśniowska A., *Starlike functions associated with some hyperbola*, Zesz. Nauk. Politech. Rzesz. 147, Math. 19(1996), 117–126

[7] Wiśniowska A., *Majorization of derivatives in certain subclass of starlike functions*, Zesz. Nauk. Politech. Rzesz., Math. 20 (1996), 145–150

[8] Wiśniowska A., *On starlike functions related with hyperbolic regions*, Proceedings of Second International Workshop "Transform Methods and Special Functions, Varna '96" (1997), 532–540

[9] Wiśniowska A., *Neighbourhoods of convex functions related with parabola*, Demonstratio Mathematica vol. XXX, no 1 (1997), 109–114

[10] Kanas S., Wiśniowska A., *Conic regions and k-uniform convexity II*, Zesz. Nauk. Politech. Rzesz., Math. 22 (1998), 65–78

[11] Kanas S., Wiśniowska A., *Conic regions and k-uniform convexity*, J. Comp. Appl. Math. 105 (1999), 327–336

[12] Wiśniowska A., *On bounded starlike functions*, Zesz. Nauk. Politech. Rzesz., Math. 23 (1999), 167–173

[13] Wiśniowska A., *Geometric characterization of strongly starlike functions*, Zesz. Nauk. Politech. Rzesz., Math. 24 (2000), 155-158

[14] Kanas S., Wiśniowska A., *Conic domains and starlike functions*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 45(4) (2000), 647–657

[15] Wajnryb B., Wiśniowska-Wajnryb A., *Lifting of homeomorphisms to 4-sheeted branched coverings of a disk*, Topology and its Applications 155(16) (2008), 1820–1839

[16] Wajnryb B., Wiśniowska-Wajnryb A., *Lifting of homeomorphisms to branched coverings of a disk*, Fundamenta Mathematicae 217 (2012), 95–122

[17] Wajnryb B., Wiśniowska-Wajnryb A., *Non-standard automorphisms of branched coverings of a disk and a sphere*, Fundamenta Mathematicae 218 (2012), 1–11

[18] Sokół J, Wiśniowska-Wajnryb, *Averaging operators and the classes of starlike functions related to parabola*, Anal. Math. Phys. 10(1) (2020). https://doi.org/10.1007/s13324-019-00351-5

[19] Wiśniowska-Wajnryb A., *An elementary proof of the Loomis-Whitney theorem*, Acta Mathematica Hungarica, 164 (2021), 518–521

6. Omówienie wyników wybranych publikacji

W pracy [1] podano pewne interpretacje geometryczne klasy $\mathcal{S}^*(\alpha)$ funkcji α-kątowo gwiaździstych wprowadzonej przez Brannana i Kirwana oraz niezależnie przez J. Stankiewicza. W geometrycznej teorii funkcji szukamy interpretacji geometrycznej klasy funkcji danej warunkiem analitycznym i odwrotnie, szukamy pewnych warunków analitycznych dla klas zdefiniowanych przez własności geometryczne. Przypomnijmy, że klasa $\mathcal{S}^*(\alpha) \subset \mathcal{S}$ jest zdefiniowana warunkiem

$$\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad \text{dla} \quad z \in U,\ 0 < \alpha \leq 1.$$

Dla danego zbioru $D \subset \mathbb{C}$ i liczby zespolonej w niech

$$wD := \{\zeta = wz : z \in D\}.$$

W [1] dowodzimy, że $f \in \mathcal{S}$ należy do klasy $\mathcal{S}^*(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall\, w\ \{w \in f(U) \Rightarrow wG_\alpha \subset f(U)\},$$

gdzie G_α jest kątem spiralnym ograniczonym przez łuki spirali

$$l_3 : w = \exp\{t\,\mathrm{tg}(\alpha\pi/2) + it\},\ t \in [-\pi, 0],$$

$$l_4 : w = \exp\{-t\,\mathrm{tg}(\alpha\pi/2) + it\},\ t \in [0, \pi].$$

W pracy [13] podana została inna geometryczna charakteryzacja klasy $\mathcal{S}^*(\alpha)$. Dowodzimy, że $f \in \mathcal{S}$ należy do klasy $\mathcal{S}^*(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathrm{Re}\,\frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)} \geq 0 \quad \text{dla} \quad z \in U,\ |\zeta| \leq |z| \cos\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Wykorzystując to wykazujemy, że $f \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy obraz części wspólnej koła U i zbioru

$$U\left(0, \frac{|\zeta|}{\cos(\alpha\pi/2)}\right) \cup U(\zeta, r)$$

jest zbiorem gwiaździstym dla każdego $\zeta \in U$ i $r > 0$.

W pracy [3] podaliśmy rozwiązanie problemu otwartego (postawionego w pracy M.O. Reade, H. Silverman, *Radii problems for linear properties of univalent functions*, Houston J. Math. Vol. 17, No. 2 (1991), 227–235) : znaleźć $\min_{|z|=r} \mathrm{Re} f(z)/z$, gdy $f \in \mathcal{ST}(\alpha)$ dla $0 < \alpha < 1/2$. Otrzymaliśmy następujący rezultat: Niech $f \in \mathcal{ST}(\alpha)$, $0 < \alpha < 1/2$. Wtedy dla $|z| = r < 1$ mamy

$$\min \mathrm{Re}\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{(1+r)^{2(1-\alpha)}}, \quad 0 < r \leq \frac{1}{2(1-\alpha)},$$

$$\min \mathrm{Re}\frac{f(z)}{z} = (1 - 2r\cos\theta_r + r^2)^{\alpha-1} \cos\left[2(1-\alpha)\frac{\pi - \theta_r}{3 - 2\alpha}\right],\ \frac{1}{2(1-\alpha)} < r < 1,$$

gdzie $\theta_r = \theta_r(r)$ jest jedynym w przedziale $(0, \pi)$ rozwiązaniem równania

$$r = \frac{\sin(\frac{\pi-\theta_r}{3-2\alpha})}{\sin[2(1-\alpha)\frac{\pi-\theta_r}{3-2\alpha}]}.$$

W pracy [7] badaliśmy relację między majoryzacją funkcji f i F w U a majoryzacją ich pochodnych f' i F' w mniejszym kole $|z| < r_0$. Niech f i F będą dwoma funkcjami analitycznymi w kole $|z| < r$. Mówimy, że funkcja f jest majoryzowana przez funkcję F w kole $|z| < r$ i piszemy $f \ll F$ w $|z| < r$, jeśli istnieje funkcja φ analityczna w $|z| < r$ taka, że $f(z) = \varphi(z) \cdot F(z)$, $|\varphi(z)| \leq 1$ dla $|z| < r$. Dla danej liczby $n = 0, 1, 2, \ldots$ niech N_n oznacza klasę funkcji analitycznych w U postaci

$$f(z) = a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \ldots,\ a_{n+1} \neq 0.$$

Niech $\mathcal{SH}(\alpha)$, $\alpha > 0$, oznacza podklasę klasy $\mathcal{ST}$ zawierającą funkcje, które spełniają warunek

$$\left|\frac{zF'(z)}{F(z)} - 2(\sqrt{2}-1)\alpha\right| < \sqrt{2}\mathrm{Re}\,\frac{zF'(z)}{F(z)} + 2(\sqrt{2}-1)\alpha, \quad z \in U.$$

Klasa ta jest związana z obszarem ograniczonym hiperbolą, a jej podstawowe własności zostały wykazane w pracach [6], [8]. W pracy [7] wyznaczyliśmy najmniejszą liczbę $T(r)$ taką, że dla każdej pary funkcji $f \in N_n$, $F \in \mathcal{SH}(\alpha)$ zachodzi: $f \ll F$ w U implikuje $|f'(z)| \leq T(r) \cdot |F'(z)|$ dla $|z| = r < 1$.

W pracach [15], [16], [17], wspólnych z Bronisławem Wajnrybem, rozważamy rozgałęzione nakrycia dysku D zawartego w płaszczyźnie. Nakrycie stopnia d to funkcja $f : X \to D$ powierzchni X z brzegiem na dysk D taka, że każdy punkt $y \in D$ posiada małe, spójne otwarte otoczenie U w D, dla którego przeciwobraz $f^{-1}(U)$ składa się z d składowych V_i. Ograniczenie f do V_i jest homeomorfizmem $f : V_i \to U$. Rozważamy zwykłą strukturę zespoloną na D i wtedy istnieje taka struktura zespolona na X, że f jest funkcją analityczną (lokalnie jednolistną).

Funkcja $f : X \to D$ jest nakryciem rozgałęzionym, jeżeli istnieją wyróżnione punkty $y_1, \ldots, y_n \in D$ (punkty krytyczne) i ich otoczenia U_j takie, że dla niektórych $V_j \subset f^{-1}(U_j)$ funkcja $f : V_j \to U_j$ wygląda (w odpowiednich współrzędnych) jak $y = f(z) = z^k$, gdzie punkt $y = 0$ odpowiada punktowi y_j. Wtedy punkt $x \in X$ odpowiadający punktowi $z = 0$ nazywamy punktem rozgałęzienia stopnia k. Rozważamy tylko proste nakrycia takie, że każdy $f^{-1}(y_i)$ ma $d-1$ punktów i jeden z nich jest rozgałęziony stopnia 2.

Rozważamy homeomorfizmy σ dysku D, które są stałe na brzegu D i permutują punkty krytyczne. Klasy izotopii tych homeomorfizmów tworzą grupę warkoczy B_n. Czasem homeomorfizm $\sigma \in B_n$ podnosi się do homeomorfizmu $\overline{\sigma}$ powierzchni X (który przeprowadza każdy przeciwobraz $f^{-1}(y)$ na przeciwobraz $f^{-1}(\sigma(y))$) i jest stały na brzegu X. Taki homeomorfizm $\overline{\sigma}$ nazywamy automorfizmem nakrycia f i każdy taki automorfizm nakrycia f jest podniesieniem jakiegoś automorfizmu σ. Naszym celem było znaleźć grupę wszystkich automorfizmów dowolnego prostego nakrycia f czyli podgrupę L_f grupy B_n, której elementy podnoszą się do automorfizmów nakrycia f. Dokładniej znaleźć skończony zbiór automorfizmów σ, który generuje podgrupę L_f. Grupa L_f ma skończony indeks w grupie B_n.

W 1985 roku Joan Birman i Bronisław Wajnryb znaleźli generatory L_f dla prostych nakryć dysku D stopnia 3.

W 1991 roku Fabrizio Catanese i Bronisław Wajnryb znaleźli generatory L_f dla nakryć dowolnego stopnia, gdy X jest dyskiem (i funkcja f jest wielomianem).

W pracy [15] znaleźliśmy generatory L_f dla dowolnych prostych nakryć dysku stopnia 4.

W pracy [16] rozwiązaliśmy ogólny problem, znaleźliśmy generatory L_f dla prostego nakrycia dowolnego stopnia.

W pracy [17] rozszerzyliśmy nasze wyniki do niestandardowych automorfizmów nakrycia f: na dole σ jest stałe na brzegu D, ale na górze $\overline{\sigma}$ permutuje punkty $f^{-1}(y_0)$ dla ustalonego punktu y_0 na brzegu dysku D.

Opis generatorów jest zbyt skomplikowany, aby go tutaj przedstawić.

W pracy [19] udowodniliśmy w elementarny sposób twierdzenie Loomisa-Whitneya. Twierdzenie to podaje nierówność jaka zachodzi między objętością zbioru otwartego w przestrzeni n-wymiarowej, a polami jego rzutów na $(n-1)$-wymiarowe podprzestrzenie współrzędnych. Loomis i Whitney zredukowali problem do kombinatorycznego twierdzenia, które jest szczególnym przypadkiem twierdzenia:

Twierdzenie [19]. *Niech U będzie skończonym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i niech U_i będzie rzutem U na podprzestrzeń $\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n : a_i = 0\}$. Wtedy*

$$|U|^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n} |U_i|,$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A.

Udowodniliśmy następujący lemat podający ogólną nierówność zachodzącą między liczbami rzeczywistymi:

Lemat [19]. *Niech $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k\}$ będzie skończonym zbiorem dodatnich liczb rzeczywistych. Wtedy*

$$\prod_{i=1}^{k}(a_i^k + b_i^k) \geq \left(\prod_{i=1}^{k} a_i + \prod_{i=1}^{k} b_i\right)^k .$$

Z lematu tego w prosty sposób (dowód indukcyjny) wynika kombinatoryczna wersja twierdzenia Loomisa-Whitneya.