Zagadnienia na rozmowę kwalifikacyjną dla kandydatów ubiegających się o przyjęcie na studia II stopnia na kierunek studiów: matematyka

Wstęp do logiki i teorii mnogości

1. Rachunek zbiorów: działania na zbiorach, inkluzje, działania uogólnione na zbiorach.
2. Liczby naturalne: aksjomatyka Peano, indukcja matematyczna, rekurencja.
3. Relacje: iloczyn kartezjański zbiorów, relacje, działania na relacjach, klasyfikacja relacji, relacja równoważnościowa, klasy abstrakcji.
4. Funkcje jako relacje: własności funkcji, obrazy i przeciwobrazy zbiorów wyznaczone przez funkcje.
5. Moc zbiorów: zbiory skończone i nieskończone, równoliczność zbiorów, zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne, liczby kardynalne.
6. Relacja porządku: porządek częściowy, porządek liniowy, porządek gęsty, porządek ciągły, dobry porządek, lemat Kuratowskiego-Zorna, pewnik wyboru.

Analiza matematyczna

1. Zbiory liczbowe: aksjomatyka zbioru liczb rzeczywistych, kresy zbiorów.
2. Funkcje jednej i wielu zmiennych: określenie i własności funkcji jednej i wielu zmiennych, funkcja odwrotna, składanie funkcji, charakterystyka funkcji elementarnych.
3. Ciągi liczbowe: ciągi monotoniczne, ciągi ograniczone, zbieżność ciągów, granica niewłaściwa ciągu, własności arytmetyczne granicy, twierdzenie o trzech ciągach, ciąg Cauchy'ego, twierdzenie Bolzano – Weierstrassa.
4. Szeregi liczbowe: zbieżność szeregów, szereg geometryczny i harmoniczny, kryteria zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych, zbieżność bezwzględna i warunkowa, szereg naprzemienny i kryterium Leibniza, działania na szeregach zbieżnych.
5. Granica funkcji jednej i wielu zmiennych: definicja Cauchy'ego i Heinego granicy funkcji jednej i wielu zmiennych, własności arytmetyczne granic, granice jednostronne funkcji jednej zmiennej, asymptoty funkcji.
6. Ciągłość funkcji jednej i wielu zmiennych: pojęcie ciągłości funkcji jednej i wielu zmiennych, własności funkcji ciągłych, jednostajna ciągłość funkcji.
7. Pochodna funkcji jednej zmiennej i jej zastosowania: definicja pochodnej, interpretacja fizyczna i geometryczna pochodnej, różniczkowalność, ciągłość a różniczkowalność funkcji, podstawowe twierdzenia o pochodnych, twierdzenia o wartości średniej, pochodne wyższych rzędów, reguła de l'Hospitala, monotoniczność i ekstrema lokalne, wypukłość i punkty przegięcia, wzór Taylora.
8. Pochodna kierunkowa i pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych, różniczkowalność funkcji wielu zmiennych, różniczka zupełna, pochodne cząstkowe wyższych rzędów, ekstrema lokalne i warunkowe funkcji wielu zmiennych.
9. Całka nieoznaczona: funkcja pierwotna i określenie całki nieoznaczonej, całkowanie przez części i przez podstawienie, całkowanie funkcji wymiernych, niewymiernych, trygonometrycznych.
10. Całka oznaczona: całka Riemanna, warunki wystarczające całkowalności funkcji w sensie Riemanna, interpretacja geometryczna całki oznaczonej, własności całki oznaczonej, wzór Newtona – Leibniza, zastosowania geometryczne i fizyczne całek.

11. Ciągi i szeregi funkcyjne: zbieżność punktowa i jednostajna ciągów i szeregów funkcyjnych, kryterium Weiersteassa zbieżności jednostajnej szeregu, własności funkcyjne granicy ciągu (szeregu) funkcyjnego zbieżnego jednostajnie (różniczkowanie i całkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych), szeregi potęgowe, rozwinięcie funkcji w szeregi Taylora i Maclaurina.
12. Całki wielokrotne: podstawowe własności całek wielokrotnych (podwójnych i potrójnych), zamiana całki wielokrotnej na całki iterowane, twierdzenia o zamianie zmiennych, zastosowania całek wielokrotnych.

Algebra liniowa z geometrią

1. Ciało liczb zespolonych: różne postaci liczb zespolonych, działania na liczbach zespolonych, wzór de Moivre'a, pierwiastki z liczby zespolonej, interpretacja geometryczna podzbiorów zbioru liczb zespolonych.
2. Przestrzenie liniowe: liniowa zależność i niezależność wektorów, baza przestrzeni liniowej, wymiar przestrzeni liniowej, podprzestrzeń liniowa.
3. Macierze i wyznaczniki: działania na macierzach, definicja wyznacznika, własności wyznaczników, metody obliczania wyznaczników, macierz odwrotna, minory i rząd macierzy.
4. Układy równań liniowych: twierdzenie Kroneckera-Capellego, wzory Cramera, postać macierzowa układu równań.
5. Odwzorowania liniowe: definicja odwzorowania liniowego, jądro i obraz odwzorowania liniowego, rząd odwzorowania liniowego, reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego, macierz przejścia, macierz odwzorowania liniowego po zmianie bazy.
6. Endomorfizmy: wartość własna i wektor własny endomorfizmu, wielomian charakterystyczny.
7. Formy kwadratowe: odwzorowanie dwuliniowe, macierz i rząd odwzorowania dwuliniowego, twierdzenie Lagrange'a o sprowadzaniu formy kwadratowej do postaci kanonicznej.
8. Euklidesowe przestrzenie wektorowe: iloczyn skalarny, norma wyznaczona przez iloczyn skalarny, nierówność Schwarza, baza ortonormalna, macierz ortogonalna.
9. Wektory: działania na wektorach w R^3: dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez skalar, iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy.
10. Geometria analityczna w R^2: prosta na płaszczyźnie, definicje i równania krzywych stożkowych.

Algebra

1. Struktury algebraiczne: grupy, pierścienie, ciała – definicje, przykłady.
2. Podgrupy: podgrupy niezmiennicze, warstwy, twierdzenie Lagrange'a. podgrupy normalne. grupy ilorazowe.
3. Homomorfizm grup: definicja i twierdzenia dotyczące homomorfizmów.
4. Grupa cykliczna. Grupy abelowe skończenie generowane.
5. Pierścienie: określenie pierścienia, pierścienia całkowitego, podpierścienia, ideału.
6. Pierścień ilorazowy. Ideały pierwsze i maksymalne, charakteryzacja w terminach pierścieni ilorazowych.

7. Podzielność w pierścieniach całkowitych: relacja podzielności w pierścieniach całkowitych, relacja stowarzyszenia, grupa jedności pierścienia, rozkład na czynniki, elementy nierozkładalne, elementy pierwsze, pierścienie z rozkładem, pierścienie Gaussa, największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność, algorytm Euklidesa.

Elementy topologii

1. Przestrzenie metryczne: definicja przestrzeni metrycznej, przykłady, kula w przestrzeni metrycznej; zbiory otwarte, zbiory domknięte; wnętrze, domknięcie i brzeg zbioru w przestrzeni metrycznej, średnica zbioru, zbiory ograniczone.
2. Ciągi w przestrzeniach metrycznych: zbieżność ciągów w przestrzeni metrycznej, podstawowe twierdzenia; ciąg Cauchy'ego, przestrzeń metryczna zupełna; uzupełnienie, twierdzenie Banacha o punkcie stałym.
3. Pojęcie przestrzeni topologicznej: różne sposoby wprowadzania topologii, baza przestrzeni topologicznej; podprzestrzeń.
4. Zbiory w przestrzeniach topologicznych: wnętrze, domknięcie, brzeg i zbiór punktów skupienia zbioru w przestrzeni topologicznej; różne rodzaje zbiorów w przestrzeni topologicznej: zbiór gęsty, brzegowy.
5. Funkcje ciągłe w przestrzeniach topologicznych: definicja i przykłady funkcji ciągłych, warunki równoważne ciągłości; złożenie funkcji ciągłych; homeomorfizmy – definicja, przykłady; niezmienniki topologiczne.
6. Zwartość; charakteryzacja zbiorów zwartych w przestrzeniach euklidesowych; charakteryzacja zbiorów zwartych w przestrzeniach metrycznych.

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

1. Podstawowe pojęcia: zdarzenia elementarne i losowe, aksjomaty
1. prawdopodobieństwa.
2. Zdarzenia niezależne, prawdopodobieństwo warunkowe i wzór Bayesa.
3. Kombinatoryczne schematy prawdopodobieństwa: schemat Bernoulliego, schematy urnowe.
4. Zmienna losowa, jej rozkład i dystrybuanta, oraz momenty.
5. Funkcja prawdopodobieństwa wybranych rozkładów dyskretnych (dwumianowy, geometryczny, Poissona).
6. Funkcja gęstości wybranych rozkładów ciągłych (normalny, wykładniczy).
7. Rozkład łączny i rozkłady brzegowe pary zmiennych losowych: niezależność zmiennych.
8. Rozkład empiryczny cechy i jego opis. Parametry cech ilościowych i jakościowych.
9. Estymacja punktowa i przedziałowa. Własności estymatorów.
10. Weryfikacja hipotez statystycznych. Parametryczne testy istotności. Testy nieparametryczne.