SYLABUS

DOTYCZY CYKLU KSZTAŁCENIA 2026 - 2028
Rok akademicki 2026/2027

1. PODSTAWOWE INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

Nazwa przedmiotu	Rachunek prawdopodobieństwa
Kod przedmiotu*	
nazwa jednostki prowadzącej kierunek	Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych
Nazwa jednostki realizującej przedmiot	Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych Instytut Matematyki
Kierunek studiów	Matematyka
Poziom studiów	studia II stopnia
Profil	Ogólnoakademicki
Forma studiów	Stacjonarne
Rok i semestr/y studiów	rok I, semestr I
Rodzaj przedmiotu	kierunkowy
Język wykładowy	Polski
Koordynator	dr hab. prof. UR Rostyslav Hryniv
Imię i nazwisko osoby prowadzącej / osób prowadzących	dr hab. prof. UR Rostyslav Hryniv, mgr Patryk Rela

***** *-opcjonalnie, zgodnie z ustaleniami w Jednostce*

1.1.Formy zajęć dydaktycznych, wymiar godzin i punktów ECTS

Semestr (nr)	Wykł.	Ćw.	Konw.	Lab.	Sem.	ZP	Prakt.	Inne (jakie?)	**Liczba pkt. ECTS**
1	30	30							6

1.2. Sposób realizacji zajęć

☑ zajęcia w formie tradycyjnej
☑ zajęcia realizowane z wykorzystaniem metod i technik kształcenia na odległość

1.3 Forma zaliczenia przedmiotu (z toku) (egzamin, zaliczenie z oceną, zaliczenie bez oceny)

Ćwiczenia audytoryjne - zaliczenie na ocenę
Wykład – egzamin

2.WYMAGANIA WSTĘPNE

Zaliczone przedmioty 1 stopnia: Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa, wstęp do logiki i teorii mnogości, analiza matematyczna; znajomość podstaw teorii miary i całki Lebesgue'a

3. CELE, EFEKTY UCZENIA SIĘ , TREŚCI PROGRAMOWE I STOSOWANE METODY DYDAKTYCZNE

3.1 Cele przedmiotu

C1	Pogłębienie wiedzy z rachunku prawdopodobieństwa, w szczególności w zakresie rozkładów i ich typów, ogólnej definicji wartości oczekiwanej, funkcji charakterystycznych oraz podstawowych modeli procesów losowych (łańcuchy Markowa, proces Poissona).
C2	Ćwiczenie umiejętności dostrzegania w otaczającej rzeczywistości zjawisk i procesów o charakterze losowym i opisywania ich w terminach prawdopodobieństwa
C3	Zapoznanie studentów z twierdzeniami granicznymi rachunku prawdopodobieństwa, ich dowodami i zastosowaniami.
C4	Rozwijanie umiejętności ścisłego rozumowania probabilistycznego, przeprowadzania dowodów i konstruowania kontrprzykładów

3.2 Efekty uczenia się dla przedmiotu

EK (efekt uczenia się)	Treść efektu uczenia się zdefiniowanego dla przedmiotu	Odniesienie do efektów kierunkowych[1]
EK_01	zna i rozumie w pogłębionym stopniu rachunek prawdopodobieństwa oraz jego znaczenie dla innych dziedzin nauki; zna najważniejsze definicje i twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa, w tym twierdzenia graniczne, oraz podstawowe modele procesów losowych; rozumie rolę i znaczenie konstrukcji rozumowań matematycznych opartych na teorii rachunku prawdopodobieństwa	K_W01, K_W02
EK_02	potrafi konstruować rozumowania matematyczne oparte na rachunku prawdopodobieństwa, w tym dowodzić twierdzenia oraz obalać hipotezy poprzez konstrukcję i dobór kontrprzykładów; potrafi sprawdzać poprawność wnioskowań w budowaniu dowodów formalnych z zakresu rachunku prawdopodobieństwa; potrafi stosować metody rachunku prawdopodobieństwa do rozwiązywania złożonych problemów, dostrzegając w nich struktury probabilistyczne	K_U01, K_U02, K_U03, K_U04,
EK_03	jest gotów do krytycznej oceny posiadanej wiedzy, formułowania pytań służących zrozumieniu badanego problemu oraz wyrażania własnych opinii na temat teoretycznych i praktycznych zagadnień rachunku prawdopodobieństwa; jest gotów do stałego uczenia się oraz dostrzegania znaczenia rachunku prawdopodobieństwa w życiu społecznym i gospodarczym	K_K01

[1] W przypadku ścieżki kształcenia prowadzącej do uzyskania kwalifikacji nauczycielskich uwzględnić również efekty uczenia się ze standardów kształcenia przygotowującego do wykonywania zawodu nauczyciela.

3.3 Treści programowe

A. Problematyka wykładu

Treści merytoryczne
1. Przypomnienie podstaw rachunku prawdopodobieństwa: prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność zdarzeń, zmienne losowe dyskretne i ciągłe, podstawowe rozkłady i ich momenty.
2. Aksjomatyczna definicja przestrzeni probabilistycznej; ciągłość prawdopodobieństwa; granica górna i dolna ciągu zdarzeń.
3. Zmienna losowa i jej rozkład; dystrybuanta i jej własności; charakteryzacja dystrybuant.
4. Typy rozkładów: dyskretne, absolutnie ciągłe i osobliwe (rozkład Cantora); twierdzenie Lebesgue'a o rozkładzie dystrybuanty.
5. Ogólna definicja wartości oczekiwanej; przejście do granicy pod znakiem wartości oczekiwanej (twierdzenia o zbieżności monotonicznej i zmajoryzowanej); wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej.
6. Momenty zmiennych losowych; nierówności Markowa, Czebyszewa, Jensena, Höldera i Cauchy'ego–Schwarza.
7. Niezależność zdarzeń i zmiennych losowych; lematy Borela–Cantellego; prawo 0–1 Kołmogorowa.
8. Wektory losowe: rozkład łączny, gęstość, rozkłady brzegowe i warunkowe; przekształcenia wektorów losowych; splot rozkładów.
9. Wielowymiarowy rozkład normalny: macierz kowariancji, przekształcenia liniowe, rozkłady brzegowe i warunkowe.
10. Funkcje tworzące i funkcje charakterystyczne: własności, twierdzenie o jednoznaczności, związek z momentami.
11. Rodzaje zbieżności zmiennych losowych i relacje między nimi; twierdzenie Lévy'ego o ciągłości.
12. Prawa wielkich liczb: słabe prawo Chinczyna, mocne prawo wielkich liczb Kołmogorowa; zastosowania (metoda Monte Carlo, dystrybuanta empiryczna).
13. Centralne twierdzenia graniczne: Lindeberga–Lévy'ego, Lindeberga–Fellera, Lapunowa; wielowymiarowe centralne twierdzenie graniczne.
14. Łańcuchy Markowa z czasem dyskretnym: macierz przejścia, klasyfikacja stanów, rozkład stacjonarny, twierdzenie ergodyczne; błądzenie losowe i problem ruiny gracza.
15. Proces Poissona: definicja, związek z rozkładem wykładniczym i rozkładem Poissona, czasy oczekiwania; zastosowania (kolejki, ubezpieczenia).

B. Problematyka ćwiczeń audytoryjnych, konwersatoryjnych, laboratoryjnych, zajęć praktycznych

Treści merytoryczne
1. Rozwiązywanie zadań utrwalających podstawy rachunku prawdopodobieństwa: prawdopodobieństwo warunkowe, niezależność, wyznaczanie rozkładów i momentów.
2. Stosowanie ciągłości prawdopodobieństwa; wyznaczanie granicy górnej i dolnej ciągu zdarzeń.

3. Badanie, czy dana funkcja jest dystrybuantą; wyznaczanie rozkładów zmiennych losowych.
4. Rozkład dystrybuanty na składniki dyskretny, absolutnie ciągły i osobliwy; zadania z rozkładami mieszanymi.
5. Obliczanie wartości oczekiwanych (w tym dla rozkładów mieszanych); stosowanie twierdzeń o przejściu do granicy pod znakiem wartości oczekiwanej.
6. Stosowanie nierówności Markowa, Czebyszewa, Jensena i Höldera.
7. Kolokwium 1 (tematy 1–6).
8. Badanie niezależności zdarzeń i zmiennych losowych; zastosowania lematów Borela–Cantellego.
9. Wyznaczanie rozkładów łącznych, brzegowych i warunkowych; rozkłady funkcji wektorów losowych; obliczanie splotów.
10. Rozwiązywanie zadań z wielowymiarowym rozkładem normalnym.
11. Wyznaczanie funkcji tworzących i charakterystycznych; identyfikacja rozkładów i obliczanie momentów.
12. Badanie zbieżności ciągów zmiennych losowych, konstruowanie kontrprzykładów; stosowanie praw wielkich liczb.
13. Zastosowania centralnych twierdzeń granicznych do przybliżania rozkładów.
14. Kolokwium 2 (tematy 8–13).
15. Proste zadania z łańcuchami Markowa i procesem Poissona; kolokwium poprawkowe.

3.4 Metody dydaktyczne

Ćwiczenia audytoryjne: Rozwiązywanie zadań, dyskusja, praca w grupach

Wykłady: wykład problemowy/wykład z prezentacją multimedialną/ metody kształcenia na odległość

4. METODY I KRYTERIA OCENY

4.1 Sposoby weryfikacji efektów uczenia się

Symbol efektu	Metody oceny efektów uczenia się (np.: kolokwium, egzamin ustny, egzamin pisemny, projekt, sprawozdanie, obserwacja w trakcie zajęć)	Forma zajęć dydaktycznych (w, ćw, ...)
EK_01	obserwacja w trakcie zajęć, kolokwium, egzamin pisemny	wykład, ćwiczenia
EK_02	obserwacja w trakcie zajęć, kolokwium, egzamin pisemny	wykład, ćwiczenia
EK_03	obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia

4.2 Warunki zaliczenia przedmiotu (kryteria oceniania)

Zaliczenie ćwiczeń na podstawie kolokwiów i aktywności na zajęciach.

Warunkiem uzyskania zaliczenia ćwiczeń jest zdobycie co najmniej 50% punktów z każdego kolokwium. Ocena końcowa jest wówczas ustalana według skali:

- poniżej 50% pkt. – brak zaliczenia,
- [50 – 60%) pkt. – dostateczny,
- [60 – 70%) pkt. – plus dostateczny,
- [70 – 80%) pkt. – dobry,
- [80 – 90%) pkt. – plus dobry,
- [90– 100%] pkt. – bardzo dobry.

Aktywność na ćwiczeniach może podnieść ocenę co najwyżej o pół stopnia.

Egzamin: Warunkiem zdania egzaminu jest uzyskanie z niego co najmniej 50% punktów. Ocena końcowa jest wówczas ustalana według skali:

- poniżej 50% pkt. – niedostateczny,
- [50 – 60%) pkt. – dostateczny,
- [60 – 70%) pkt. – plus dostateczny,
- [70 – 80%) pkt. – dobry,
- [80 – 90%) pkt. – plus dobry,
- [90 – 100%] pkt. – bardzo dobry.

5. CAŁKOWITY NAKŁAD PRACY STUDENTA POTRZEBNY DO OSIĄGNIĘCIA ZAŁOŻONYCH EFEKTÓW W GODZINACH ORAZ PUNKTACH ECTS

Forma aktywności	Średnia liczba godzin na zrealizowanie aktywności
Godziny kontaktowe wynikające z harmonogramu studiów	60
Inne z udziałem nauczyciela akademickiego (udział w konsultacjach, egzaminie)	5
Godziny niekontaktowe – praca własna studenta (przygotowanie do zajęć, egzaminu, napisanie referatu itp.)	90
SUMA GODZIN	155
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS	6

**Należy uwzględnić, że 1 pkt ECTS odpowiada 25-30 godzin całkowitego nakładu pracy studenta.*

6. PRAKTYKI ZAWODOWE W RAMACH PRZEDMIOTU

wymiar godzinowy	Nie dotyczy
zasady i formy odbywania praktyk	Nie dotyczy

7. LITERATURA

Literatura podstawowa:

[1] P. Billingsley, Prawdopodobieństwo i miara, PWN, Warszawa 2009.

[2] J. Jakubowski, R. Sztencel, Wstęp do teorii prawdopodobieństwa, wyd. 4, Script, Warszawa 2010.

[3] M. Krzyśko, Wykłady z teorii prawdopodobieństwa, WNT, Warszawa 2000.

[4] A. Plucińska, E. Pluciński, Probabilistyka, WNT, Warszawa 2006.

[5] W. Krysicki, J. Bartos, W. Dyczka, K. Królikowska, M. Wasilewski, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, cz. 1, PWN, Warszawa 2012.

Literatura uzupełniająca:

[1] W. Feller, Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, T. 1, PWN, Warszawa 2006.

[2] M. Fisz, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, PWN, Warszawa 1969.

[3] R. Durrett, Probability: Theory and Examples, 5th ed., Cambridge University Press, Cambridge 2019.

[4] A A Borowkow: Rachunek prawdopodobieństwa, PWN, Warszawa 1975.

[5] L. Kubik: Rachunek prawdopodobieństwa. Podręcznik dla nauczycielskich studiów matematycznych, PWN, Warszawa 1981.

Akceptacja Kierownika Jednostki lub osoby upoważnionej