SYLABUS

DOTYCZY CYKLU KSZTAŁCENIA *2026-2028.*
(skrajne daty)
Rok akademicki 2026/2027

1. PODSTAWOWE INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

Nazwa przedmiotu	Analiza rzeczywista
Kod przedmiotu*	
Nazwa jednostki prowadzącej kierunek	Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych
Nazwa jednostki realizującej przedmiot	Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych Instytut Matematyki
Kierunek studiów	Matematyka
Poziom kształcenia	studia II stopnia
Profil	ogólnoakademicki
Forma studiów	stacjonarne
Rok i semestr studiów	rok I, semestr 1
Rodzaj przedmiotu	kierunkowy
Język wykładowy	polski
Koordynator	dr Svetlana Mincheva-Kaminska
Imię i nazwisko osoby prowadzącej / osób prowadzących	dr Svetlana Mincheva-Kaminska

***** *-opcjonalnie, zgodnie z ustaleniami w Jednostce*

1.1.Formy zajęć dydaktycznych, wymiar godzin i punktów ECTS

Semestr (nr)	Wykł.	Ćw.	Konw.	Lab.	Sem.	ZP	Prakt.	Inne (jakie?)	**Liczba pkt ECTS**
1	30	30							6

1.2. Sposób realizacji zajęć

☒ zajęcia w formie tradycyjnej
☐ zajęcia realizowane z wykorzystaniem metod i technik kształcenia na odległość

1.3 Forma zaliczenia przedmiotu (z toku) (egzamin, zaliczenie z oceną, zaliczenie bez oceny)

Ćwiczenia - zaliczenie na ocenę
Wykład – egzamin

2.WYMAGANIA WSTĘPNE

Podstawowa wiedza i umiejętności z zakresu analizy matematycznej, wstępu do logiki i teorii mnogości oraz topologii.

3. CELE, EFEKTY UCZENIA SIĘ , TREŚCI PROGRAMOWE I STOSOWANE METODY DYDAKTYCZNE

3.1 Cele przedmiotu

C1	Przedstawienie i przyswojenie przez studentów zagadnień dotyczących: teorii przestrzeni z miarą; funkcji mierzalnych; zbieżności w przestrzeniach z miarą; teorii całki po dowolnej mierze.
C2	Wyposażenie studentów w niezbędne narzędzia do dalszego kształcenia matematycznego w zakresie teorii prawdopodobieństwa.
C3	Wyposażenie studentów w niezbędne narzędzia do dalszego kształcenia matematycznego w zakresie analizy funkcjonalnej.

3.2 Efekty uczenia się dla przedmiotu

EK (efekt uczenia się)	Treść efektu uczenia się zdefiniowanego dla przedmiotu	Odniesienie do efektów kierunkowych [1]
EK_01	Student ma pogłębioną wiedzę z zakresu analizy rzeczywistej, zna jej najważniejsze twierdzenia i potrafi umiejscowić tę wiedzę w rozwoju matematyki	K_W01
EK_02	Student zna podstawowe metody dowodzenia właściwe dla analizy rzeczywistej	K_W02
EK_03	Student potrafi konstruować rozumowania matematyczne z zakresu analizy rzeczywistej dowodzić twierdzenia i obalać hipotezy poprzez odpowiednie konstrukcje i dobór kontrprzykładów, potrafi sprawdzać poprawność wnioskowań	K_U02; K_U03
EK_04	Student zna konstrukcję miary i całki Lebesgue'a i ich zastosowanie w innych zagadnieniach teoretycznych i praktycznych	K_U01; K_U04
EK_05	Student jest gotów do formułowania pytań oraz wyrażania własnych opinii dotyczących zagadnień analizy rzeczywistej.	K_K01

3.3 Treści programowe

A. Problematyka wykładu

Treści merytoryczne
Rodziny podzbiorów dowolnego ustalonego zbioru (pierścienie, σ-pierścienie, ciała, σ-ciała, rodziny multiplikatywne i monotoniczne oraz półpierścienie). Rodziny generowane przez ustaloną rodzinę zbiorów. Pojęcie zbiorów borelowskich. Hierarchia podrodzin rodziny zbiorów borelowskich. Własności miary. Funkcja zbioru i jej własności

[1] W przypadku ścieżki kształcenia prowadzącej do uzyskania kwalifikacji nauczycielskich uwzględnić również efekty uczenia się ze standardów kształcenia przygotowującego do wykonywania zawodu nauczyciela.

Miara nieujemna, przestrzeń mierzalna z miarą – definicja i przykłady. Miara skończona, σ-skończona i zupełna. Własności miary. Miara zupełna. Przedłużenie funkcji addytywnej na półpierścieniu do miary na pierścieniu.

Miara zewnętrzna – definicja, przykłady i własności. Twierdzenie Caratheodory'ego oraz twierdzenie o rozszerzaniu miar. Miara zewnętrzna Lebesgue'a.

Miara Lebesgue'a w R i R^d oraz jej własności. Regularność miary Lebesgue'a. Zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a. Zbiory miary Lebesgue'a zero (w szczególności zbiór Cantora). Zbiory niemierzalne – twierdzenie Vitalego.

Funkcje równe prawie wszędzie. Funkcje mierzalne – definicja, przykłady i własności. Działania na funkcjach mierzalnych. Funkcje borelowskie. Istnienie funkcji niemierzalnych.

Zbieżność ciągów funkcyjnych w przestrzeniach mierzalnych z miarą. Zbieżność prawie wszędzie oraz zbieżność według miary. Własności zbieżności prawie wszędzie i według miary; przykłady. Ciągi Cauchy'ego prawie wszędzie i według miary. Twierdzenia Jegorowa, Łuzina i Riesza. Zbieżność prawie jednostajna.

Pojęcie funkcji charakterystycznej i funkcji prostej. Całka z funkcji prostej nieujemnej po dowolnej mierze – definicja, przykłady i własności.

Funkcje mierzalne nieujemne. Aproksymacja funkcji mierzalnych nieujemnych przez funkcje proste. Całka z funkcji mierzalnej nieujemnej – definicja, własności i przykłady. Lemat Fatou i twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej oraz wynikające z nich wnioski.

Całka z funkcji o wartościach rzeczywistych i zespolonych – definicja, własności i przykłady. Funkcje całkowalne. Przestrzenie L^p. Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

B. Problematyka ćwiczeń

Treści merytoryczne
Repetytorium z algebry zbiorów, teorii mocy, topologii przestrzeni metrycznych. Pierścień, σ-pierścień, ciało, σ-ciało, rodziny multiplikatywne i monotoniczne - zadania. Rodziny generowane przez ustaloną rodzinę zbiorów. Zbiory otwarte i domknięte, zbiory typu G_δ, F_σ, G_δσ, F_(σδ,) ... Zbiory borelowskie. Miara nieujemna – zadania. Badanie skończoności, σ-skończoności i zupełności miar. Miara zewnętrzna – zadania. Twierdzenie Caratheodory'ego i jego zastosowanie do wyznaczania zbiorów mierzalnych w sensie Caratheodory'ego. Miara zewnętrzna Lebesgue'a a miara Lebesgue'a – zadania. Zbiory mierzalne i niemierzalne w sensie Lebesgue'a. Funkcje mierzalne i borelowskie– zadania.

Badanie zbieżności ciągów funkcyjnych (zbieżność wszędzie, prawie wszędzie, jednostajna i według miary).

Obliczanie całek z funkcji charakterystycznych i prostych nieujemnych po dowolnej mierze.

Obliczanie całek z funkcji mierzalnych nieujemnych po dowolnej mierze. Zastosowanie twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej do obliczania całek.

Obliczanie całek o wartościach rzeczywistych i zespolonych. Funkcje całkowalne w sensie Riemanna i Lebesgue'a – zadania.

3.4 Metody dydaktyczne

Wykład: wykład problemowy

Ćwiczenia: wyjaśnianie, komentowanie i interpretacja zagadnień przedstawionych na wykładzie, rozwiązywanie zadań, omawianie przykładów i kontrprzykładów, dyskusja.

4. METODY I KRYTERIA OCENY

4.1 Sposoby weryfikacji efektów uczenia się

Symbol efektu	Metody oceny efektów uczenia się (np.: kolokwium, egzamin ustny, egzamin pisemny, projekt, sprawozdanie, obserwacja w trakcie zajęć)	Forma zajęć dydaktycznych (w, ćw, ...)
EK_01	obserwacja w trakcie zajęć, egzamin pisemny	w.
EK_02	obserwacja w trakcie zajęć, egzamin pisemny	w.
EK_03	kolokwium	ćw.
EK_04	kolokwium	ćw.
EK_05	obserwacja w trakcie zajęć, egzamin pisemny	w., ćw

4.2 Warunki zaliczenia przedmiotu (kryteria oceniania)

Zaliczenie ćwiczeń na podstawie kolokwiów i aktywności na zajęciach.
Warunkiem uzyskania zaliczenia ćwiczeń jest zdobycie co najmniej 50% punktów z każdego kolokwium. Ocena końcowa jest wówczas ustalana według skali:
- poniżej 50% pkt. – brak zaliczenia,
- [50 – 60%) pkt. – dostateczny,
- [60 – 70%) pkt. – plus dostateczny,
- [70 – 80%) pkt. – dobry,
- [80 – 90%) pkt. – plus dobry,
- [90– 100%] pkt. – bardzo dobry.

Aktywność na ćwiczeniach może podnieść ocenę co najwyżej o pół stopnia.

Egzamin: Warunkiem zdania egzaminu jest uzyskanie z niego co najmniej 50% punktów. Ocena końcowa jest wówczas ustalana według skali:
- poniżej 50% pkt. – niedostateczny,
- [50 – 60%) pkt. – dostateczny,

- [60 – 70%) pkt. – plus dostateczny, - [70 – 80%) pkt. – dobry, - [80 – 90%) pkt. – plus dobry, - [90 – 100%] pkt. – bardzo dobry.

5. CAŁKOWITY NAKŁAD PRACY STUDENTA POTRZEBNY DO OSIĄGNIĘCIA ZAŁOŻONYCH EFEKTÓW W GODZINACH ORAZ PUNKTACH ECTS

Forma aktywności	Średnia liczba godzin na zrealizowanie aktywności
Godziny z harmonogramu studiów	60
Inne z udziałem nauczyciela akademickiego (udział w konsultacjach, egzaminie)	5
Godziny niekontaktowe – praca własna studenta (przygotowanie do zajęć, egzaminu, napisanie referatu itp.)	90
SUMA GODZIN	155
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS	6

** Należy uwzględnić, że 1 pkt ECTS odpowiada 25-30 godzin całkowitego nakładu pracy studenta.*

6. PRAKTYKI ZAWODOWE W RAMACH PRZEDMIOTU

wymiar godzinowy	Nie dotyczy
zasady i formy odbywania praktyk	Nie dotyczy

7. LITERATURA

Literatura podstawowa:

1. F. M. Filipczak, *Teoria miary i całki.* Skrypt ze zbiorem zadań, Wydawnictwo Uniwersytety Łódzkiego, Łódź, 1997
2. P. R. Halmos, *Measure Theory*, Van Nostrand Reinhold, New York 1950.
3. S. Hartman, J. Mikusiński, *Teoria miary i całki Lebesque'a*, PWN, Warszawa 1957
4. W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.
5. G. Plebanek, Miara i całka, skrypt do wykłady Funkcje rzeczywiste https://galaxy.agh.edu.pl>miary_Plebanek
6. A. E. Taylor, *General Theory of Functions and Integration*, Dover Publications INC, New York 1985

Literatura uzupełniająca:

1. R. Czyż, Teoria miary i całki, Kraków 2020 https://im.uj.edu.pl>dokuments>Miara+i+całka
2. S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa 1973.
3. J. Muszyński, *Teoria całki. Miara i całka*, PWN, Warszawa 1990.
4. R. Sikorski, *Funkcje rzeczywiste*, t.1., PWN, Warszawa 1958.

5. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii,* Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 2004.
6. J. Krzyszkowski, E. Turdza, *Elementy topologii*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków 2000.
7. J. Niewiarowski, *Zadania z teorii miary*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 1999

Akceptacja Kierownika Jednostki lub osoby upoważnionej