SYLABUS

DOTYCZY CYKLU KSZTAŁCENIA *2022 -2025*

(skrajne daty)

Rok akademicki 2024/2025

1. PODSTAWOWE INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

Nazwa przedmiotu	Przedmiot z zakresu wybranego działu matematyki
Kod przedmiotu*	
Nazwa jednostki prowadzącej kierunek	Kolegium Nauk Przyrodniczych
Nazwa jednostki realizującej przedmiot	Kolegium Nauk Przyrodniczych Instytut Matematyki
Kierunek studiów	matematyka
Poziom studiów	studia I stopnia
Profil	ogólnoakademicki
Forma studiów	stacjonarne
Rok i semestr/y studiów	rok III, semestr 5
Rodzaj przedmiotu	przedmiot kierunkowy (do wyboru)
Język wykładowy	język polski
Koordynator	prof. dr hab. Wiesław Śliwa
Imię i nazwisko osoby prowadzącej / osób prowadzących	prof. dr hab. Wiesław Śliwa

* *-opcjonalnie, zgodnie z ustaleniami w Jednostce*

1.1.Formy zajęć dydaktycznych, wymiar godzin i punktów ECTS

Semestr (nr)	Wykł.	Ćw.	Konw.	Lab.	Sem.	ZP	Prakt.	Inne (jakie?)	**Liczba pkt. ECTS**
5	30	30							6

1.2. Sposób realizacji zajęć

☒ zajęcia w formie tradycyjnej

☒ zajęcia realizowane z wykorzystaniem metod i technik kształcenia na odległość

1.3 Forma zaliczenia przedmiotu (z toku) (egzamin, zaliczenie z oceną, zaliczenie bez oceny)

Ćwiczenia - zaliczenie z oceną

Wykład - egzamin

2.WYMAGANIA WSTĘPNE

Znajomość analizy matematycznej 1 i 2. Znajomość elementarnej teorii ciał – w tym rozszerzeń algebraicznych ciała i domknięcia algebraicznego ciała. Znajomość elementarnej topologii – w tym przestrzeni zwartych, twierdzenia Tichonowa oraz twierdzenia Baire'a.

3. CELE, EFEKTY UCZENIA SIĘ , TREŚCI PROGRAMOWE I STOSOWANE METODY DYDAKTYCZNE

3.1 Cele przedmiotu

C1	Zapoznanie studentów z podstawami teorii ciał niearchimedesowych tzn. ciał z waluacją niearchimedesową, które są zupełne w ultrametryce generowanej przez tę waluację - w tym ciała liczb p-adycznych Qp i ciała zespolonych liczb p-adycznych Cp.
C2	Zapoznanie studentów z podstawami teorii niearchimedesowych funkcji ciągłych – w tym z jednostajną aproksymacją funkcji ciągłych (a) funkcjami lokalnie stałymi; (b) funkcjami prostymi; (c) wielomianami.
C3	Zapoznanie studentów z podstawami teorii niearchimedesowych funkcji różniczkowalnych – w tym z charakteryzacją funkcji mających funkcje pierwotne.

3.2 Efekty uczenia się dla przedmiotu

EK (efekt kształcenia)	Treść efektu kształcenia zdefiniowanego dla przedmiotu	Odniesienie do efektów kierunkowych [1]
EK_01	Student zna i rozumie definicję, własności i przykłady ultrametryki i przestrzeni ultrametrycznej.	K_W01
EK_02	Student zna i rozumie definicję, własności i przykłady: waluacji na ciele; waluacji archimedesowej i niearchimedesowej; waluacji dyskretnej i gęstej.	K_W01
EK_03	Student zna i rozumie definicję i własności ultrametryki generowanej przez waluację niearchimedesową na ciele.	K_W01
EK_04	Student zna i rozumie definicję i własności waluacji p-adycznej na ciele liczb wymiernych oraz twierdzenie Ostrowskiego o waluacjach na ciele liczb wymiernych.	K_W01, K_W02
EK_05	Student zna i rozumie definicję i własności lokalnie zwartego ciała z waluacją niearchimedesową.	K_W01
EK_06	Student zna i rozumie konstrukcję uzupełnienia ciała z waluacją.	K_W02
EK_07	Student zna i rozumie definicję, własności i przykłady ciała niearchimedesowego – w tym ciała liczb p-adycznych Qp, gdzie p jest dowolną liczbą pierwszą.	K_W01
EK_08	Student zna i rozumie definicję, własności i przykłady: ultranormy na przestrzeni liniowej nad ciałem niearchimedesowym oraz przestrzeni ultraunormowanej.	K_W01
EK_09	Student zna i rozumie twierdzenie Krulla o rozszerzaniu waluacji niearchimedesowej oraz wie, że waluację z ciała niearchimedesowego K można rozszerzyć jednoznacznie na algebraiczne domknięcie ciała K.	K_W02
EK_10	Student zna i rozumie podstawowe twierdzenia o algebraicznym domknięciu ciała niearchimedesowego.	K_W02

[1] W przypadku ścieżki kształcenia prowadzącej do uzyskania kwalifikacji nauczycielskich uwzględnić również efekty uczenia się ze standardów kształcenia przygotowującego do wykonywania zawodu nauczyciela.

EK_11	Student zna i rozumie definicję i własności ciała zespolonych liczb p-adycznych Cp.	K_W01
EK_12	Student zna i rozumie definicję funkcji prostej oraz twierdzenie o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłej funkcjami prostymi.	K_W01, K_W02
EK_13	Student zna i rozumie twierdzenie Kaplansky'ego o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłej wielomianami.	K_W02
EK_14	Student zna i rozumie definicję funkcji pierwotnej do danej funkcji oraz charakteryzację funkcji, które mają funkcję pierwotną; w szczególności wie, że każda funkcja ciągła ma funkcję pierwotną.	K_W01, K_W02
EK_15	Student potrafi udowodnić, że każda skończenie wymiarowa przestrzeń ultraunormowana jest zupełna.	K_U01
EK_16	Student potrafi udowodnić twierdzenia: (a) o ciągłości sumy, iloczynu i ilorazu funkcji ciągłych; (b) o ciągłości funkcji złożonej; (c) o ciągłości funkcji odwrotnej.	K_U01
EK_17	Student potrafi pokazać twierdzenie o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłej funkcjami lokalnie stałymi.	K_U01, K_U02
EK_18	Student potrafi udowodnić twierdzenie: (a) o różniczkowalności sumy, iloczynu i ilorazu funkcji różniczkowalnych; (b) o różniczkowalności funkcji złożonej.	K_U01
EK_19	Student potrafi pokazać na przykładzie, że w analizie niearchimedesowej nie zachodzi twierdzenie analogiczne do twierdzenia o wartości średniej.	K_U01, K_U02
EK_20	Student potrafi pokazać, że pochodna funkcji różniczkowalnej jest funkcją I klasy Baire'a.	K_U01
EK_21	Student jest w stanie krytycznie oceniać odbieraną wiedzę i formułować pytania służące lepszemu zrozumieniu pojęć, przykładów i twierdzeń (i ich dowodów)z zakresu analizy niearchimedesowej.	K_K01, K_K02

3.3 Treści programowe

A. Problematyka wykładu

Treści merytoryczne
Przestrzenie ultrametryczne (2 godziny) Definicja ultrametryki i przestrzeni ultrametrycznej. Przykłady przestrzeni ultrametrycznych.Własności przestrzeni ultrametrycznych.
Ciała z waluacją (4 godziny) Definicja waluacji na ciele i metryki generowanej przez nią. Definicja waluacji archimedesowej i niearchimedesowej na ciele. Waluacje p-adyczne na ciele liczb wymiernych. Twierdzenie Ostrowskiego o waluacjach na ciele liczb wymiernych. Własności waluacji niearchimedesowej i ultrametryki generowanej przez nią. Definicja waluacji dyskretnej oraz waluacji gęstej. Definicja ciała residualnego ciała z waluacją niearchimedesową.
Uzupełnienie ciała z waluacją (2 godziny) Definicja uzupełnienia ciała z waluacją.

Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności uzupełnienia ciała z waluacją.
Ciała niearchimedesowe (2 godziny) Definicja ciała niearchimedesowego. Zbieżność ciągów, szeregów i iloczynów nieskończonych w ciele niearchimedesowym. Twierdzenie o lokalnie zwartych ciałach z waluacją niearchimedesową.
Ciała liczb p-adycznych Qp (2 godziny) Definicja ciała liczb p-adycznych Qp jako uzupełnienia ciała liczb wymiernych Q z waluacją p-adyczną. Własności ciała liczb p-adycznych Qp.
Przestrzenie ultraunormowane (2 godziny) Definicja ultranormy na przestrzeni liniowej nad ciałem niearchimedesowym. Twierdzenie o równoważności ultranorm na skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej. Twierdzenie o zupełności skończenie wymiarowej przestrzeni ultraunormowanej.
Rozszerzanie waluacji (4 godziny) Twierdzenie Krulla o istnieniu rozszerzenia waluacji niearchimedesowej z podciała na ciało. Twierdzenie o jednoznaczności rozszerzenia waluacji z ciała niearchimedesowego na jego algebraiczne domknięcie.
O domknięciu algebraicznym ciała niearchimedesowego (4 godziny) Twierdzenie o ciele residualnym domknięcia algebraicznego ciała niearchimedesowego. Twierdzenie o grupie wartości waluacji na domknięciu algebraicznym ciała niearchimedesowego. Algebraiczne domknięcie lokalnie zwartego ciała niearchimedesowego nie jest zupełne. Uzupełnienie algebraicznego domknięcia ciała niearchimedesowego jest ciałem algebraicznie domkniętym. Definicja ciała liczb p-adycznych zespolonych Cp jako uzupełnienia algebraicznego domknięcia ciała liczb p-adycznych Qp. Ciało liczb p-adycznych zespolonych Cp jest algebraicznie izomorficzne z ciałem liczb zespolonych C.
Aproksymacja funkcji ciągłych (4 godziny) [W tym i w następnych punktach przez funkcję rozumiemy niearchimedesową funkcję tzn. funkcję określoną na pewnym podzbiorze X ciała niearchimedesowego K i przyjmującą wartości w ciele K] Definicja funkcji lokalnie stałej. Twierdzenie o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłej funkcjami lokalnie stałymi. Twierdzenie o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłej funkcjami prostymi tzn. funkcjami ciągłymi mającymi skończony zbiór wartości. Twierdzenie Kaplansky'ego o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłej wielomianami.
Funkcje pierwotne (4 godziny) Mówimy, że funkcja g jest funkcją pierwotną funkcji f, jeżeli jest różniczkowalna i jej pochodna jest równa funkcji f. Pochodna funkcji różniczkowalnej jest funkcją I klasy Baire'a. Każda funkcja I klasy Baire'a jest granicą punktową pewnego ciągu funkcji lokalnie stałych. Definicja funkcji lokalnie liniowej. Każda funkcja lokalnie stała ma funkcję pierwotną, która jest funkcją lokalnie liniowa. Definicja d-zbieżności i d-granicy ciągu funkcji. Każda funkcja I klasy Baire'a ma funkcję pierwotną, która jest d-granicą pewnego d-zbieżnego ciągu funkcji lokalnie liniowych. Wobec tego funkcja f ma funkcję pierwotną wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcją I klasy Baire'a. W szczególności każda funkcja ciągła ma funkcję pierwotną. Funkcja g jest funkcją pierwotną funkcji zerowej wtedy i tylko wtedy, gdy jest d-granicą pewnego d-zbieżnego ciągu funkcji lokalnie stałych.

B. Problematyka ćwiczeń audytoryjnych

Treści merytoryczne
Liczby p-adyczne (4 godziny) Działania algebraiczne na liczbach p-adycznych. Ciągi i szeregi o wyrazach w ciele Qp.

Porównanie ciała liczb p-adycznych Qp z ciałem liczb rzeczywistych R i z ciałem liczb zespolonych C. **Granica i ciągłość funkcji** (6 godzin) Definicja granicy funkcji f w punkcie. Twierdzenie o działaniach na granicach funkcji w punkcie. Definicja ciągłości funkcji f w punkcie. Twierdzenie o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji ciągłych. Twierdzenie o ciągłości funkcji złożonej. Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej do funkcji ciągłej i różnowartościowej. Zbiór punktów ciągłości funkcji f jest zbiorem typu G-delta w dziedzinie funkcji f. Jeżeli założymy dodatkowo, że dziedzina funkcji f jest zbiorem typu G-delta w ciele K oraz f jest funkcją I klasy Baire'a, to zbiór punktów ciągłości funkcji f jest gęsty w dziedzinie funkcji f.
Różniczkowalność funkcji (8 godzin) Definicja różniczkowalności funkcji w punkcie oraz pochodnej funkcji w punkcie. Każdy wielomian jest funkcją różniczkowalną w każdym punkcie. Twierdzenie o różniczkowalności sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji różniczkowalnych. Twierdzenie o różniczkowalności funkcji złożonej. Przykład funkcji różnowartościowej f, która ma w każdym punkcie pochodną równą zero. Z przykładu tego wynika, że w analizie niearchimedesowej nie zachodzą twierdzenia analogiczne do twierdzeń o wartości średniej w analizie rzeczywistej. Przykład funkcji różniczkowalnej, której pochodna w każdym punkcie jest równa 1 (a więc jest różna od zera), ale która nie jest różnowartościowa w żadnym otoczeniu pewnego punktu dziedziny. Funkcja f jest różniczkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest d-granicą pewnego d-zbieżnego ciągu funkcji lokalnie liniowych.
Mocna różniczkowalność funkcji (6 godziny) Definicja mocnej różniczkowalności funkcji. Własności funkcji mocno różniczkowalnej. Twierdzenie o mocnej różniczkowalności sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji mocno różniczkowalnych. Przykład funkcji różniczkowalnej, której pochodna jest funkcją zerową (a więc funkcją ciągłą), ale która nie jest mocno różniczkowalna. Jeżeli dziedzina funkcji różniczkowalnej f jest zbiorem typu G-delta, to zbiór punktów, w których funkcja f jest mocno różniczkowalna jest gęstym zbiorem typu G-delta.
Funkcje analityczne (6 godziny) Zbieżność szeregów potęgowych. Funkcje analityczne. Zasada maksimum. Funkcje exp i log oraz ich rozszerzenia. Funkcje trygonometryczne i cyklometryczne.

3.4 Metody dydaktyczne

Wykład – metodą tradycyjną
Ćwiczenia – metodą tradycyjną.

4. METODY I KRYTERIA OCENY

4.1 Sposoby weryfikacji efektów uczenia się

Symbol efektu	Metody oceny efektów uczenia się (np.: kolokwium, egzamin ustny, egzamin pisemny, projekt, sprawozdanie, obserwacja w trakcie zajęć)	Forma zajęć dydaktycznych (w, ćw, …)
EK_ 01 - EK_21	Obserwacja studentów i dialog ze studentami w trakcie zajęć i konsultacji. Aktywność studentów na zajęciach. Odpowiedzi i wypowiedzi ustne studentów. Kolokwium. Egzamin.	WYKŁAD, ĆWICZENIA

4.2 Warunki zaliczenia przedmiotu (kryteria oceniania)

Ćwiczenia: zaliczenie na ocenę na podstawie kolokwium i aktywności na zajęciach. Wykład: egzamin jest w formie pisemnej. Warunkiem zdania egzaminu jest uzyskanie z niego co najmniej 50% punktów. Ocena końcowa jest ustalana według skali: - poniżej 50% pkt. – brak zaliczenia, - [50 – 60%) pkt. – dostateczny, - [60 – 70%) pkt. – plus dostateczny, - [70 – 80%) pkt. – dobry, - [80 – 90%) pkt. – plus dobry, - [90– 100%] pkt. – bardzo dobry.

5. CAŁKOWITY NAKŁAD PRACY STUDENTA POTRZEBNY DO OSIĄGNIĘCIA ZAŁOŻONYCH EFEKTÓW W GODZINACH ORAZ PUNKTACH ECTS

Forma aktywności	**Średnia liczba godzin na zrealizowanie aktywności**
Godziny kontaktowe wynikające z harmonogramu studiów	60 (30 w +30 ćw.)
Inne z udziałem nauczyciela akademickiego (udział w konsultacjach, egzaminie)	15
Godziny niekontaktowe – praca własna studenta (przygotowanie do zajęć, egzaminu, napisanie referatu itp.)	75
SUMA GODZIN	150
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS	6

** Należy uwzględnić, że 1 pkt ECTS odpowiada 25-30 godzin całkowitego nakładu pracy studenta.*

6. PRAKTYKI ZAWODOWE W RAMACH PRZEDMIOTU

wymiar godzinowy	Nie dotyczy
zasady i formy odbywania praktyk	Nie dotyczy

7. LITERATURA

Literatura podstawowa:

1. S. Katok - *p-adic analysis compared with real,* Student Mathematical Library, Mathematics Advanced Study, AMS, Providence, RI, 2007.

2. A. Robert - *A course in p-adic analysis*.,Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.

3. W. H. Schikhof – *Ultrametric Calculus*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1984.

Literatura uzupełniająca:

1. G. Bachman - *Introduction to p-adic numbers and valuation theory,* Academic Press, New York-London 1964.

2. S. Bosch; U. Güntzer; R. Remmert - *Non-Archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry,* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 261. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

3. F. Gouvêa - *p-adic numbers. An introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

4. N. Koblitz - *p-adic analysis: a short course on recent work,* London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980.

5. K. Mahler, *p-adic numbers and their functions*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1981.

6. A.H. Lightstone; A. Robinson - *Nonarchimedean fields and asymptotic expansions,* North-Holland Mathematical Library, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1975.

7. C.Perez-Garcia; W.H. Schikhof - *Locally convex spaces over non-Archimedean valued fields*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 119. Cambridge University Press, Cambridge, 2010

8. A.C. van Rooij - *Non-Archimedean functional analysis*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

9. P.Schneider – *Nonarchimedean functional analysis,* Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

Akceptacja Kierownika Jednostki lub osoby upoważnionej