

SYLABUS
DOTYCZY CYKLU KSZTAŁCENIA 2022-2025
(skrajne daty)
Rok akademicki 2022/2023

1. PODSTAWOWE INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

Nazwa przedmiotu	Algebra liniowa z geometrią
Kod przedmiotu*	
Nazwa jednostki prowadzącej kierunek	Kolegium Nauk Przyrodniczych
Nazwa jednostki realizującej przedmiot	Kolegium Nauk Przyrodniczych, Instytut Matematyki
Kierunek studiów	Matematyka
Poziom studiów	studia I stopnia
Profil	ogólnoakademicki
Forma studiów	stacjonarne
Rok i semestr studiów	rok I, semestr 1, 2
Rodzaj przedmiotu	kierunkowy
Język wykładowy	język polski
Koordinator	dr hab. Janusz Sokół, prof. UR
Imię i nazwisko osoby prowadzącej / osób prowadzących	dr hab. Janusz Sokół, prof. UR, dr Małgorzata Chudziak

* - *opcjonalnie, zgodnie z ustaleniami w Jednostce*

1.1. Formy zajęć dydaktycznych, wymiar godzin i punktów ECTS

Semestr (nr)	Wykł.	Ćw.	Konw.	Lab.	Sem.	ZP	Prakt.	Inne (jakie?)	Liczba pkt ECTS
1	30	30							6
2	30	30							6

1.2. Sposób realizacji zajęć

- zajęcia w formie tradycyjnej
- zajęcia realizowane z wykorzystaniem metod i technik kształcenia na odległość

1.3 Forma zaliczenia przedmiotu (z toku) (egzamin, zaliczenie z oceną, zaliczenie bez oceny)
Wykład-egzamin, Ćwiczenia - zaliczenie na ocenę

2. WYMAGANIA WSTĘPNE

WIADOMOŚCI ZDOBYTE W SZKOLE PONADGIMNAZJALNEJ

3. CELE, EFEKTY UCZENIA SIĘ, TREŚCI PROGRAMOWE I STOSOWANE METODY DYDAKTYCZNE

3.1 Cele przedmiotu

C ₁	Zapoznanie z podstawowymi pojęciami algebry liniowej.
C ₂	Zapoznanie z podstawowymi pojęciami geometrii analitycznej.
C ₃	Zapoznanie z podstawowymi metodami dowodowymi stosowanymi w algebrze liniowej i geometrii analitycznej.
C ₄	Zapoznanie z podstawowymi technikami obliczeniowymi stosowanymi w algebrze liniowej i geometrii analitycznej.

3.2 Efekty uczenia się dla przedmiotu

EK (efekt uczenia się)	Treść efektu uczenia się zdefiniowanego dla przedmiotu	Odniesienie do efektów kierunkowych)
EK_o1	definiuje klasyczne pojęcia i formułuje podstawowe twierdzenia z zakresu algebry liniowej i geometrii analitycznej	K_Wo1, K_Wo2, K_Wo3, K_Wo4
EK_o2	posiada wiedzę dotyczącą metod dowodowych stosowanych w algebrze liniowej i geometrii analitycznej	K_Wo2, K_Wo3
EK_o3	posiada wiedzę dotyczącą technik obliczeniowych stosowanych w algebrze liniowej i geometrii analitycznej	K_Wo4
EK_o4	dowodzi podstawowe twierdzenia z zakresu algebry liniowej i geometrii analitycznej	K_Uo1, K_Uo2
EK_o5	posługuje się pojęciami: grupy, ciała, przestrzeni liniowej, wektora, macierzy, przekształcenia liniowego, prostej i płaszczyzny, krzywej stożkowej, powierzchni obrotowej	K_Uo7, K_Uo8
EK_o6	potrafi wykonywać działania na liczbach zespolonych (w różnych postaciach) oraz interpretować różne zbiory liczb zespolonych, rozwiązuje równania w zbiorze liczb zespolonych	K_Uo7, K_Uo8
EK_o7	umie obliczać wyznaczniki i zna ich własności	K_Uo7, K_Uo8
EK_o8	rozwiązuje układy równań liniowych o stałych współczynnikach, potrafi posłużyć się geometryczną interpretacją rozwiązań	K_Uo7, K_Uo8
EK_o9	znajduje macierze przekształceń liniowych w różnych bazach	K_Uo7, K_Uo8
EK_o10	oblicza wartości własne i wektory własne macierzy, potrafi wyjaśnić geometryczny sens tych pojęć	K_Uo7, K_Uo8
EK_o11	potrafi napisać różne równania prostych i płaszczyzn oraz badać ich wzajemne położenie	K_Uo7, K_Uo8
EK_o12	stosuje własności krzywych stożkowych w rozwiązywaniu zadań	K_Uo7, K_Uo8

	w rozwiązywaniu zadań	
EK_13	potrafi napisać równania powierzchni obrotowych	K_Uo7, K_Uo8
EK_14	samodzielnie wyszukuje informacje w literaturze i właściwie je stosuje	K_Ko1
EK_15	potrafi formułować opinie na temat podstawowych zagadnień algebry liniowej i geometrii analitycznej	K_Ko2
EK_16	zna ograniczenia własnej wiedzy i rozumie potrzebę dalszego kształcenia	K_Ko3

3.3 Treści programowe

A. Problematyka wykładu

<p>Treści merytoryczne</p> <p>Działania: podstawowe własności i przykłady.</p> <p>Struktury algebraiczne i homomorfizmy: przegląd podstawowych struktur algebraicznych: grupy, ciała, homomorfizmy grup.</p> <p>Ciało liczb zespolonych: postać algebraiczna, trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej, działania na liczbach zespolonych, wzór de Moivre'a, pierwiastki z liczby zespolonej, interpretacje geometryczne zbiorów liczb zespolonych.</p> <p>Przestrzenie liniowe: kombinacja liniowa wektorów, liniowa zależność i niezależność wektorów, baza przestrzeni liniowej, wymiar przestrzeni liniowej, podprzestrzeń liniowa, suma prosta podprzestrzeni liniowych, przestrzeń ilorazowa.</p> <p>Macierze: podstawowe pojęcia, różne typy macierzy, działania na macierzach.</p> <p>Wyznacznik macierzy kwadratowej: definicja wyznacznika, własności wyznaczników, metody obliczania wyznaczników, wzór Laplace'a, macierz odwrotna, minory i rząd macierzy.</p> <p>Układy równań liniowych: twierdzenie Kroneckera-Capellego, ogólna postać rozwiązań układu równań liniowych, badanie układu równań, wzory Cramera.</p> <p>Odwzorowania liniowe: definicja odwzorowania liniowego, jądro i obraz odwzorowania liniowego, rząd odwzorowania liniowego, monomorfizm, epimorfizm, izomorfizm. Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego. Mnożenie macierzy a składanie odwzorowań liniowych. Macierz przejścia, macierz odwzorowania liniowego po zmianie bazy.</p> <p>Endomorfizmy: wartość własna i wektor własny endomorfizmu, wielomian charakterystyczny.</p> <p>Formy kwadratowe: odwzorowanie dwuliniowe, macierz i rząd odwzorowania dwuliniowego, diagonalizacja formy kwadratowej.</p> <p>Euklidesowe przestrzenie wektorowe: iloczyn skalarny, norma wyznaczona przez iloczyn skalarny, nierówność Schwarz'a, baza ortonormalna, macierz ortogonalna.</p> <p>Wektory: działania na wektorach w R^3: dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez skalar, iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy.</p> <p>Geometria analityczna w R^2: Prosta na płaszczyźnie. Definicje i równania krzywych stożkowych.</p> <p>Geometria analityczna w R^3: Prosta i płaszczyzna w przestrzeni. Powierzchnie obrotowe w R^3 (walce, stożki, hiperboloidy, paraboloidy).</p>
--

B. Problematyka ćwiczeń audytoryjnych

<p>Treści merytoryczne</p> <p>Działania: badanie własności działań.</p> <p>Struktury algebraiczne i homomorfizmy: sprawdzanie, czy struktura algebraiczna jest grupą, ciałem; sprawdzanie, czy funkcja jest homomorfizmem grup, wyznaczania jądra i obrazu homomorfizmu.</p> <p>Ciało liczb zespolonych: postać algebraiczna, trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej,</p>
--

działania na liczbach zespolonych w różnych postaciach, potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych.
Ciało liczb zespolonych interpretacje geometryczne zbiorów liczb zespolonych, rozwiązywanie równań w zbiorze liczb zespolonych.
Przestrzenie liniowe: badanie liniowej zależności i niezależności wektorów.
Przestrzenie liniowe: wyznaczania bazy przestrzeni liniowej; wyznaczanie współrzędnych wektora w bazie, wyznaczanie wymiaru przestrzeni liniowej.
Przestrzenie liniowe: podprzestrzeń liniowa.
Macierze: działania na macierzach.
Wyznacznik macierzy kwadratowej: obliczanie wyznaczników z wykorzystaniem ich własności.
Macierz odwrotna: wyznaczania macierzy odwrotnej do danej macierzy z definicji i z wykorzystaniem wzoru.
Rząd macierzy: wyznaczanie rzędu macierzy.
Układy równań liniowych: badanie niesprzeczności układu równań liniowych z wykorzystaniem twierdzenia Kroneckera-Capellego, rozwiązywanie różnych układów równań, układ i wzory Cramera, wykorzystanie macierzy odwrotnej w rozwiązywaniu układów Cramera.
Odwzorowania liniowe: sprawdzanie liniowości odwzorowania, wyznaczania jądra i obrazu odwzorowania liniowego.
Macierz odwzorowanie liniowego: wyznaczanie macierzy odwzorowania w różnych bazach, wyznaczania i wykorzystywanie reprezentacji macierzowej odwzorowanie liniowego.
Działania na odwzorowaniach liniowych: dodawanie, mnożenie przez skalar, składanie; związek z macierzami odwzorowań.
Macierz odwzorowania po zmianie bazy, macierz przejścia.
Endomorfizmy: wartość własna i wektor własny endomorfizmu, wielomian charakterystyczny.
Formy kwadratowe: sprawdzanie dwuliniowości odwzorowania, wyznaczanie macierzy i rzędu odwzorowania dwuliniowego, przedstawianie formy kwadratowej w postaci diagonalnej.
Euklidesowe przestrzenie wektorowe: badanie i wykorzystywanie własności iloczynu skalarnego, obliczanie normy wyznaczonej przez iloczyn skalarny, zastosowanie nierówności Schwarzera, sprawdzanie ortogonalności macierzy.
Wektory: dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez skalar, iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy w R^3 ; zastosowanie działań na wektorach do rozwiązywania zadań.
Geometria analityczna w R^2: Prosta na płaszczyźnie, różne rodzaje równań prostych, wzajemne położenie prostych.
Geometria analityczna w R^2: Definicje i równania krzywych stożkowych, własności krzywych stożkowych, styczne do krzywych stożkowych.
Geometria analityczna w R^3: Prosta i płaszczyzna w przestrzeni, różne rodzaje równań, badanie wzajemnego położenia dwóch prostych, prostej i płaszczyzny, dwóch płaszczyzn. Symetria osiowa i płaszczyznowa.
Geometria analityczna w R^3: Powierzchnie obrotowe w R^3 (walce, stożki, hiperboloidy, paraboloidy) – równania i własności.

3.4 METODY DYDAKTYCZNE

WYKŁAD: WYKŁAD TRADYCYJNY Z ELEMENTAMI PREZENTACJI MULTIMEDIALNEJ

ĆWICZENIA: ANALIZA ZADAŃ PROBLEMOWYCH Z DYSKUSJĄ, ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ

4. METODY I KRYTERIA OCENY

4.1 Sposoby weryfikacji efektów uczenia się

Symbol efektu	Metody oceny efektów uczenia się (np.: kolokwium, egzamin ustny, egzamin pisemny, projekt, sprawozdanie, obserwacja w	Forma zajęć dydaktycznych (w, ćw, ...)
---------------	---	--

	trakcie zajęć)	
EK_01	egzamin ustny, obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia
EK_02	egzamin ustny, obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia
EK_03	egzamin ustny, obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia
EK_04	egzamin ustny, obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia
EK_05	kolokwium, egzamin pisemny, egzamin ustny, obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia
EK_06	kolokwium, egzamin pisemny, egzamin ustny, obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia
EK_07	kolokwium, egzamin pisemny, egzamin ustny, obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia
EK_08	kolokwium, egzamin pisemny, egzamin ustny, obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia
EK_09	kolokwium, egzamin pisemny, egzamin ustny, obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia
EK_10	kolokwium, egzamin pisemny, egzamin ustny, obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia
EK_11	kolokwium, egzamin pisemny, egzamin ustny, obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia
EK_12	kolokwium, egzamin pisemny, egzamin ustny, obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia
EK_13	kolokwium, egzamin pisemny, egzamin ustny, obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia
EK_14	obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia
EK_15	obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia
EK_16	obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia

4.2 Warunki zaliczenia przedmiotu (kryteria oceniania)

<p>Zaliczenie ćwiczeń na ocenę jest ustalane na podstawie sprawdzianów pisemnych oraz aktywności studenta w trakcie ćwiczeń. W ciągu semestru studenci piszą dwa sprawdziany, z których łącznie można uzyskać 50 pkt. Liczba sprawdzianów i sposób przypisania do nich punktów jest podawana do wiadomości studentom podczas pierwszych zajęć w semestrze. Za aktywność w trakcie zajęć student może otrzymać dodatkowe punkty. Ocena końcowa jest wówczas ustalana według skali:</p> <p>[20, 26) pkt – 3.0, [26, 32) pkt – 3.5, [32, 38) pkt – 4.0, [38, 44) pkt – 4.5, powyżej 44 pkt – 5.0.</p> <p>Wykład kończy się egzaminem. Egzamin jest pisemny za 50 punktów. Ocena ostateczna jest pozytywna gdy uzyska się na egzaminie co najmniej 15 punktów i w sumie z punktami z ćwiczeń ustalana według skali: [0,40) pkt – 2,0, [40, 52) pkt – 3.0, [52, 64) pkt – 3.5, [64, 76) pkt – 4.0, [76, 88) pkt – 4.5, powyżej 88 pkt – 5.0.</p>
--

5. CAŁKOWITY NAKŁAD PRACY STUDENTA POTRZEBNY DO OSIĄGNIĘCIA ZAŁOŻONYCH EFEKTÓW W GODZINACH ORAZ PUNKTACH ECTS

Forma aktywności	Średnia liczba godzin na zrealizowanie aktywności
Godziny kontaktowe wynikające z harmonogramu studiów	60+60=120
Inne z udziałem nauczyciela (udział w konsultacjach, egzaminie)	20
Godziny niekontaktowe – praca własna studenta (przygotowanie do zajęć, egzaminu, napisanie referatu itp.)	160
SUMA GODZIN	300
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS	6+6=12

* Należy uwzględnić, że 1 pkt ECTS odpowiada 25-30 godzin całkowitego nakładu pracy studenta.

6. PRAKTYKI ZAWODOWE W RAMACH PRZEDMIOTU

wymiar godzinowy	
zasady i formy odbywania praktyk	

7. LITERATURA

Literatura podstawowa:

1. B. Gleichgewicht, *Algebra*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2002.
2. J. Gancarzewicz, *Algebra liniowa z elementami geometrii*, Wydawnictwo Naukowe UJ, Kraków, 2001.
3. B. Gdowski, E. Pluciński, *Zbiór zadań z rachunku wektorowego i geometrii analitycznej*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2006
4. A. Białyński-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa 2009.
5. A. Łomnicki, M. Magdoń, M. Żurek-Etgens, *Podstawy algebry liniowej w zadaniach*, WN WSP, Kraków 1998.
6. M. Moszyńska, *Geometria z algebrą liniową*, PWN, Warszawa 1989.
7. S. Przybyło, A. Szlachtowski, *Algebra i geometria afiniczna w zadaniach*, WNT, Warszawa 1983.

Literatura uzupełniająca:

1. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1 i 2*, Oficyna Wydawnicza GiS, 2000.
2. A. I. Kostyrykin, *Wstęp do algebry*, PWN, Warszawa 1984.

3. A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, PWN, Warszawa 1975.

4. Z. Opial, *Algebra*, PWN, Warszawa 1975.

5. B. Pochwalska, R. Pochwalski, *Matematyka. Elementy algebry liniowej*, Wyd. Uczelniane Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 1997.

Akceptacja Kierownika Jednostki lub osoby upoważnionej