

**SYLABUS**  
**DOTYCZY CYKLU KSZTAŁCENIA 2025 - 2028**  
*(skrajne daty)*  
Rok akademicki 2025/2026

**1. PODSTAWOWE INFORMACJE O PRZEDMIOCIE**

|                                                       |                                                             |
|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| Nazwa przedmiotu                                      | Matematyka dyskretna                                        |
| Kod przedmiotu*                                       |                                                             |
| Nazwa jednostki prowadzącej kierunek                  | Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych                        |
| Nazwa jednostki realizującej przedmiot                | Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych<br>Instytut Matematyki |
| Kierunek studiów                                      | Matematyka                                                  |
| Poziom studiów                                        | studia I stopnia                                            |
| Profil                                                | ogólnoakademicki                                            |
| Forma studiów                                         | stacjonarne                                                 |
| Rok i semestr/y studiów                               | rok I, semestr 2                                            |
| Rodzaj przedmiotu                                     | przedmiot kierunkowy                                        |
| Język wykładowy                                       | język polski                                                |
| Koordynator                                           | dr Edyta Trybucka                                           |
| Imię i nazwisko osoby prowadzącej / osób prowadzących | dr Edyta Trybucka                                           |

\* -opcjonalnie, zgodnie z ustaleniami w Jednostce

**1.1. Formy zajęć dydaktycznych, wymiar godzin i punktów ECTS**

| Semestr<br>(nr) | Wykł. | Ćw. | Konw. | Lab. | Sem. | ZP | Prakt. | Inne<br>(jakie?) | Liczba pkt.<br>ECTS |
|-----------------|-------|-----|-------|------|------|----|--------|------------------|---------------------|
| 3               | 30    | 30  |       |      |      |    |        |                  | 6                   |

**1.2. Sposób realizacji zajęć**

☒ zajęcia w formie tradycyjnej

☐ zajęcia realizowane z wykorzystaniem metod i technik kształcenia na odległość

**1.3 Forma zaliczenia przedmiotu (z toku) (egzamin, zaliczenie z oceną, zaliczenie bez oceny)**

EGZAMIN

**2. WYMAGANIA WSTĘPNE**

|                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------|
| Analiza matematyczna I, Algebra I, Podstawy logiki i teorii mnogości |
|----------------------------------------------------------------------|

### 3. CELE, EFEKTY UCZENIA SIĘ, TREŚCI PROGRAMOWE I STOSOWANE METODY DYDAKTYCZNE

#### 3.1 Cele przedmiotu

|                |                                                                                                                                                           |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| C <sub>1</sub> | Poznanie własności sum i iloczynów skończonych oraz różnych sposobów sumowania sum skończonych.                                                           |
| C <sub>2</sub> | Zapoznanie z podstawowymi pojęciami dotyczącymi równań rekurencyjnych i metod ich rozwiązywania oraz metod dowodzenia przy pomocy indukcji matematycznej. |
| C <sub>3</sub> | Poznanie elementów teorii liczb, arytmetyki modularnej, wykonywanie obliczeń modulo. Zastosowania w rozkładzie na czynniki pierwsze oraz w szyfrowaniu.   |

#### 3.2 Efekty uczenia się dla przedmiotu

| EK (efekt uczenia się) | Treść efektu uczenia się zdefiniowanego dla przedmiotu                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Odniesienie do efektów kierunkowych <sup>1</sup> |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| EK_o1                  | Student zna i rozumie podstawowe pojęcia oraz metody służące do opisu problemów z zakresu matematyki dyskretnej, posiada wiedzę dotyczącą metod dowodowych stosowanych w matematyce dyskretnej. Student posiada wiedzę dotyczącą technik obliczeniowych stosowanych w matematyce dyskretnej, rozumie znaczenie dowodu w matematyce oraz istotność założeń w rozumowaniach matematycznych. Potrafi ilustrować znane pojęcia przykładami, a przy pomocy kontrprzykładu potrafi obalić fałszywe hipotezy i niepoprawne rozumowania. Student zna metody matematyki dyskretnej: indukcję matematyczną, teorię równań rekurencyjnych, techniki i własności zliczania zbiorów i funkcji, pojęcia i twierdzenia arytmetyki modularnej, stosuje podstawowe testy pierwszości i szyfry. Zna i rozumie dylematy współczesnej cywilizacji, przy których opisie i wyjaśnieniu pomocna jest matematyka dyskretna. | K_Wo1, K_Wo2<br>K_Wo3, K_Wo4,<br>K_Wo8           |
| EK_o2                  | Student poprawnie w zrozumiał sposób formułuje definicje i twierdzenia, umie analizować problemy i znajdować ich rozwiązania w oparciu o poznaną wiedzę, formułować opinie na temat podstawowych zagadnień matematyki dyskretnej, rozumie znaczenie matematyki dyskretnej w matematyce. Potrafi posługiwać się terminologią matematyki dyskretnej przy definiowaniu pojęć, formułowaniu twierdzeń i opracowywaniu prostych modeli matematycznych. Dostrzega obecność problematyki matematyki dyskretnej w różnych zagadnieniach matematycznych i informatycznych. Rozumie relacje między teorią liczb a kryptografią.                                                                                                                                                                                                                                                                               | K_Uo1, K_Uo2,<br>K_U10                           |

<sup>1</sup> W przypadku ścieżki kształcenia prowadzącej do uzyskania kwalifikacji nauczycielskich uwzględnić również efekty uczenia się ze standardów kształcenia przygotowującego do wykonywania zawodu nauczyciela.

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                     |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| EK_03 | Student jest gotów do uznania ograniczeń własnej wiedzy i własnych umiejętności, a w związku z tym rozumie potrzebę ciągłego uczenia się poprzez samodzielne wyszukiwanie w literaturze i w Internecie informacji dotyczących omawianych na zajęciach zagadnień. Wyraża opinie na temat teoretycznych i praktycznych zagadnień z matematyki. Student rozumie potrzebę stosowania zdobytej wiedzy w praktyce, korzystając z opinii ekspertów, określa priorytety służące rozwiązaniu zadania. Student jest gotów do prezentowania krytycznej postawy wobec odbieranych treści, w szczególności niemających logicznego uzasadnienia. | K_Ko1, K_Ko2, K_Ko3 |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|

### 3.3 Treści programowe

#### A. Problematyka wykładu

|                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Treści merytoryczne                                                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Sumy i iloczyny skończone.</b> Własności sum i iloczynów skończonych. Różne sposoby sumowania sum skończonych w tym sumowanie przez zaburzenie.                                                                                                                 |
| <b>Indukcja i rekurencja.</b> Silna i słaba zasada indukcji matematycznej, rekurencja, wieże Hanoi, równania rekurencyjne, iterowanie równań rekurencyjnych, drzewa rekursji, twierdzenie o rekurencji uniwersalnej. Funkcja generująca.                           |
| <b>Elementy teorii liczb.</b> Największy wspólny dzielnik, algorytm Euklidesa, rozszerzony algorytm Euklidesa, rozkład liczb na czynniki pierwsze, twierdzenie Dirichleta, twierdzenie Bertranda-Czebyszewa, twierdzenie Erdösa. Algorytm sita Eratostenesa.       |
| <b>Arytmetyka modularna.</b> Kongruencje, odwrotność multiplikatywna, potęgowanie modularne, małe twierdzenie Fermata, funkcja Eulera i twierdzenie Eulera. Kongruencje liniowe, układy kongruencji równoległych, chińskie twierdzenie o resztach.                 |
| <b>Kryptografia.</b> Wprowadzenie do kryptografii. Szyfr Cezara oraz jego matematyczne podstawy, szyfrowanie liniowe. Szyfr wieloalfabetyczny Albertiego. Szyfry z kluczem prywatnym i z kluczem publicznym, algorytm RSA – konstrukcja oraz podstawy teoretyczne. |

#### B. Problematyka ćwiczeń audytoryjnych

|                                                                                                                                                                                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Treści merytoryczne                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Sumy i iloczyny skończone.</b> Własności sum i iloczynów skończonych. Różne sposoby sumowania sum skończonych w tym sumowanie przez zaburzenie.                                                                                                           |
| <b>Indukcja i rekurencja.</b> Silna i słaba zasada indukcji matematycznej, rekurencja, wieże Hanoi, równania rekurencyjne, iterowanie równań rekurencyjnych, drzewa rekursji, twierdzenie o rekurencji uniwersalnej. Funkcja generująca.                     |
| <b>Elementy teorii liczb.</b> Największy wspólny dzielnik, algorytm Euklidesa, rozszerzony algorytm Euklidesa, rozkład liczb na czynniki pierwsze, twierdzenie Dirichleta, twierdzenie Bertranda-Czebyszewa, twierdzenie Erdösa. Algorytm sita Eratostenesa. |

**Arytmetyka modularna.** Kongruencje, odwrotność multiplikatywna, potęgowanie modularne, małe twierdzenie Fermata, funkcja Eulera i twierdzenie Eulera. Kongruencje liniowe, układy kongruencji równoległych, chińskie twierdzenie o resztach.

**Kryptografia.** Wprowadzenie do kryptografii. Szyfr Cezara oraz jego matematyczne podstawy, szyfrowanie liniowe. Szyfr wieloalfabetyczny Albertiego. Szyfry z kluczem prywatnym i z kluczem publicznym, algorytm RSA – konstrukcja oraz podstawy teoretyczne.

### 3.4 Metody dydaktyczne

**Wykład:** wykład tradycyjny z elementami prezentacji multimedialnej.

**Ćwiczenia:** analiza zadań problemowych z dyskusją, rozwiązywanie zadań.

## 4. METODY I KRYTERIA OCENY

### 4.1 Sposoby weryfikacji efektów uczenia się

| Symbol efektu | Metody oceny efektów uczenia się<br>(np.: kolokwium, egzamin ustny, egzamin pisemny, projekt, sprawozdanie, obserwacja w trakcie zajęć) | Forma zajęć dydaktycznych<br>(w, ćw, ...) |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| EK_01         | Kolokwium, egzamin, obserwacja w trakcie zajęć                                                                                          | wykład, ćwiczenia                         |
| EK_02         | Kolokwium, egzamin, obserwacja w trakcie zajęć                                                                                          | wykład, ćwiczenia                         |
| EK_03         | Kolokwium, egzamin, obserwacja w trakcie zajęć                                                                                          | wykład, ćwiczenia                         |

### 4.2 Warunki zaliczenia przedmiotu (kryteria oceniania)

Zaliczenie ćwiczeń na podstawie kolokwiów i aktywności na zajęciach.

Warunkiem uzyskania zaliczenia ćwiczeń jest zdobycie co najmniej 50% punktów z każdego kolokwium. Ocena końcowa jest wówczas ustalana według skali:

- poniżej 50% pkt. – brak zaliczenia,
- [50 – 60%] pkt. – dostateczny,
- [60 – 70%] pkt. – plus dostateczny,
- [70 – 80%] pkt. – dobry,
- [80 – 90%] pkt. – plus dobry,
- [90 – 100%] pkt. – bardzo dobry.

Aktywność na ćwiczeniach może podnieść ocenę co najwyżej o pół stopnia.

Egzamin: Egzamin: egzamin składa się z części teoretycznej i praktycznej. Warunkiem dopuszczenia do egzaminu jest zaliczenie ćwiczeń. Warunkiem zdania egzaminu jest uzyskanie z niego co najmniej 50% punktów. Ocena końcowa jest wówczas ustalana według skali:

- poniżej 50% pkt. – niedostateczny,
- [50 – 60%] pkt. – dostateczny,
- [60 – 70%] pkt. – plus dostateczny,
- [70 – 80%] pkt. – dobry,

- [80 – 90%] pkt. – plus dobry,
- [90 – 100%] pkt. – bardzo dobry

W przypadkach wątpliwych decyduje rozmowa ze studentem.

## 5. CAŁKOWITY NAKŁAD PRACY STUDENTA POTRZEBNY DO OSIĄGNIĘCIA ZAŁOŻONYCH EFEKTÓW W GODZINACH ORAZ PUNKTACH ECTS

| Forma aktywności                                                                                          | Średnia liczba godzin na zrealizowanie aktywności |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Godziny z harmonogramu studiów                                                                            | 30+30=60                                          |
| Inne z udziałem nauczyciela akademickiego (udział w konsultacjach, egzaminie)                             | 20                                                |
| Godziny niekontaktowe – praca własna studenta (przygotowanie do zajęć, egzaminu, napisanie referatu itp.) | 70                                                |
| SUMA GODZIN                                                                                               | 150                                               |
| <b>SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS</b>                                                                     | <b>6</b>                                          |

*\* Należy uwzględnić, że 1 pkt ECTS odpowiada 25-30 godzin całkowitego nakładu pracy studenta.*

## 6. PRAKTYKI ZAWODOWE W RAMACH PRZEDMIOTU

|                                  |   |
|----------------------------------|---|
| wymiar godzinowy                 | - |
| zasady i formy odbywania praktyk | - |

## 7. LITERATURA

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Literatura podstawowa:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. S. Kanas, Matematyka dyskretna, Wydawnictwo UR, 2020.</li> <li>2. P. Pusz, Elementy matematyki dyskretnej, Wydawnictwo UR, 2018.</li> <li>3. R.L.Graham, D.E.Knuth, O.Patashnik, Matematyka Konkretna, PWN Warszawa 1998.</li> <li>4. K.A.Ross, Ch.R.B.Wright, Matematyka Dyskretna, PWN Warszawa 1996.</li> </ol>                                                              |
| <p>Literatura uzupełniająca:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>5. J. Grygiel, Wprowadzenie do matematyki dyskretnej, Akademicka Oficyna wydawnicza EXIT, Warszawa 2007.</li> <li>6. M. Zakrzewski, Markowe wykłady z Matematyki – Teoria liczb, Oficyna Wydawnicza GIS, Wrocław 2017.</li> <li>7. C. Stein, R. L. Drysdale, K. Bogart, Discrete mathematics for computer scientists, Addison-Wesley is an imprint of Pearson, 2011.</li> </ol> |

Akceptacja Kierownika Jednostki lub osoby upoważnionej