

SYLABUS
DOTYCZY CYKLU KSZTAŁCENIA 2023 -2026
(skrajne daty)
Rok akademicki 2025/2026

1. PODSTAWOWE INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

Nazwa przedmiotu	Przedmiot z zakresu wybranego działu matematyki
Kod przedmiotu*	
Nazwa jednostki prowadzącej kierunek	Kolegium Nauk Przyrodniczych
Nazwa jednostki realizującej przedmiot	Kolegium Nauk Przyrodniczych Instytut Matematyki
Kierunek studiów	matematyka
Poziom studiów	studia I stopnia
Profil	ogólnoakademicki
Forma studiów	stacjonarne
Rok i semestr/y studiów	rok III, semestr 5
Rodzaj przedmiotu	przedmiot kierunkowy (do wyboru)
Język wykładowy	język polski
Koordynator	prof. dr hab. Wiesław Śliwa
Imię i nazwisko osoby prowadzącej / osób prowadzących	prof. dr hab. Wiesław Śliwa

* -opcjonalnie, zgodnie z ustaleniami w Jednostce

1.1. Formy zajęć dydaktycznych, wymiar godzin i punktów ECTS

Semestr (nr)	Wykł.	Ćw.	Konw.	Lab.	Sem.	ZP	Prakt.	Inne (jakie?)	Liczba pkt. ECTS
5	30	30							6

1.2. Sposób realizacji zajęć

- ☒ zajęcia w formie tradycyjnej
- ☒ zajęcia realizowane z wykorzystaniem metod i technik kształcenia na odległość

1.3 Forma zaliczenia przedmiotu (z toku) (egzamin, zaliczenie z oceną, zaliczenie bez oceny)

Ćwiczenia - zaliczenie z oceną

Wykład - egzamin

2. WYMAGANIA WSTĘPNE

Znajomość analizy matematycznej 1 i 2. Znajomość elementarnej teorii ciał – w tym rozszerzeń algebraicznych ciała i domknięcia algebraicznego ciała. Znajomość elementarnej topologii – w tym przestrzeni zwartych, twierdzenia Tichonowa oraz twierdzenia Baire’a.

3. CELE, EFEKTY UCZENIA SIĘ, TREŚCI PROGRAMOWE I STOSOWANE METODY DYDAKTYCZNE

3.1 Cele przedmiotu

C ₁	Zapoznanie studentów z podstawami teorii ciał niearchimedesowych tzn. ciał z waluacją niearchimedesową, które są zupełne w ultrametryce generowanej przez tę waluację - w tym ciała liczb p-adycznych $\mathbb{Q}_p$ i ciała zespolonych liczb p-adycznych $\mathbb{C}_p$.
C ₂	Zapoznanie studentów z podstawami teorii niearchimedesowych funkcji ciągłych – w tym z jednostajną aproksymacją funkcji ciągłych (a) funkcjami lokalnie stałymi; (b) funkcjami prostymi; (c) wielomianami.
C ₃	Zapoznanie studentów z podstawami teorii niearchimedesowych funkcji różniczkowalnych – w tym z charakteryzacją funkcji mających funkcje pierwotne.

3.2 Efekty uczenia się dla przedmiotu

EK (efekt kształcenia)	Treść efektu kształcenia zdefiniowanego dla przedmiotu	Odniesienie do efektów kierunkowych ¹
EK_01	Student zna i rozumie definicję, własności i przykłady ultrametryki i przestrzeni ultrametrycznej.	K_Wo1
EK_02	Student zna i rozumie definicję, własności i przykłady: waluacji na ciele; waluacji archimedesowej i niearchimedesowej; waluacji dyskretnej i gęstej.	K_Wo1
EK_03	Student zna i rozumie definicję i własności ultrametryki generowanej przez waluację niearchimedesową na ciele.	K_Wo1
EK_04	Student zna i rozumie definicję i własności waluacji p-adycznej na ciele liczb wymiernych oraz twierdzenie Ostrowskiego o waluacjach na ciele liczb wymiernych.	K_Wo1, K_Wo2
EK_05	Student zna i rozumie definicję i własności lokalnie zwartego ciała z waluacją niearchimedesową.	K_Wo1
EK_06	Student zna i rozumie konstrukcję uzupełnienia ciała z waluacją.	K_Wo2
EK_07	Student zna i rozumie definicję, własności i przykłady ciała niearchimedesowego – w tym ciała liczb p-adycznych $\mathbb{Q}_p$, gdzie p jest dowolną liczbą pierwszą.	K_Wo1
EK_08	Student zna i rozumie definicję, własności i przykłady: ultranormy na przestrzeni liniowej nad ciałem niearchimedesowym oraz przestrzeni ultraunormowanej.	K_Wo1
EK_09	Student zna i rozumie twierdzenie Krulla o rozszerzaniu waluacji niearchimedesowej oraz wie, że waluację z ciała niearchimedesowego K można rozszerzyć jednoznacznie na algebraiczne domknięcie ciała K.	K_Wo2
EK_10	Student zna i rozumie podstawowe twierdzenia o algebraicznym domknięciu ciała niearchimedesowego.	K_Wo2

¹ W przypadku ścieżki kształcenia prowadzącej do uzyskania kwalifikacji nauczycielskich uwzględnić również efekty uczenia się ze standardów kształcenia przygotowującego do wykonywania zawodu nauczyciela.

EK_11	Student zna i rozumie definicję i własności ciała zespolonych liczb p-adycznych $\mathbb{C}_p$.	K_Wo1
EK_12	Student zna i rozumie definicję funkcji prostej oraz twierdzenie o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłej funkcjami prostymi.	K_Wo1, K_Wo2
EK_13	Student zna i rozumie twierdzenie Kaplansky'ego o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłej wielomianami.	K_Wo2
EK_14	Student zna i rozumie definicję funkcji pierwotnej do danej funkcji oraz charakteryzację funkcji, które mają funkcję pierwotną; w szczególności wie, że każda funkcja ciągła ma funkcję pierwotną.	K_Wo1, K_Wo2
EK_15	Student potrafi udowodnić, że każda skończenie wymiarowa przestrzeń ultraunormowana jest zupełna.	K_Uo1
EK_16	Student potrafi udowodnić twierdzenia: (a) o ciągłości sumy, iloczynu i ilorazu funkcji ciągłych; (b) o ciągłości funkcji złożonej; (c) o ciągłości funkcji odwrotnej.	K_Uo1
EK_17	Student potrafi pokazać twierdzenie o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłej funkcjami lokalnie stałymi.	K_Uo1, K_Uo2
EK_18	Student potrafi udowodnić twierdzenie: (a) o różniczkowalności sumy, iloczynu i ilorazu funkcji różniczkowalnych; (b) o różniczkowalności funkcji złożonej.	K_Uo1
EK_19	Student potrafi pokazać na przykładzie, że w analizie niearchimedesowej nie zachodzi twierdzenie analogiczne do twierdzenia o wartości średniej.	K_Uo1, K_Uo2
EK_20	Student potrafi pokazać, że pochodna funkcji różniczkowalnej jest funkcją I klasy Baire'a.	K_Uo1
EK_21	Student jest w stanie krytycznie oceniać odbieraną wiedzę i formułować pytania służące lepszemu zrozumieniu pojęć, przykładów i twierdzeń (i ich dowodów) z zakresu analizy niearchimedesowej.	K_Ko1, K_Ko2

3.3 Treści programowe

A. Problematyka wykładu

Treści merytoryczne
Przestrzenie ultrametryczne (2 godziny) Definicja ultrametryki i przestrzeni ultrametrycznej. Przykłady przestrzeni ultrametrycznych. Własności przestrzeni ultrametrycznych.
Ciała z waluacją (4 godziny) Definicja waluacji na ciele i metryki generowanej przez nią. Definicja waluacji archimedesowej i niearchimedesowej na ciele. Waluacje p-adyczne na ciele liczb wymiernych. Twierdzenie Ostrowskiego o waluacjach na ciele liczb wymiernych. Własności waluacji niearchimedesowej i ultrametryki generowanej przez nią. Definicja waluacji dyskretnej oraz waluacji gęstej. Definicja ciała residualnego ciała z waluacją niearchimedesową.
Uzupełnienie ciała z waluacją (2 godziny) Definicja uzupełnienia ciała z waluacją.

Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności uzupełnienia ciała z waluacją.
Ciała niearchimedesowe (2 godziny) Definicja ciała niearchimedesowego. Zbieżność ciągów, szeregów i iloczynów nieskończonych w ciele niearchimedesowym. Twierdzenie o lokalnie zwartych ciałach z waluacją niearchimedesową.
Ciała liczb p-adycznych $\mathbb{Q}_p$ (2 godziny) Definicja ciała liczb p-adycznych $\mathbb{Q}_p$ jako uzupełnienia ciała liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ z waluacją p-adyczną. Własności ciała liczb p-adycznych $\mathbb{Q}_p$.
Przestrzenie ultraunormowane (2 godziny) Definicja ultranormy na przestrzeni liniowej nad ciałem niearchimedesowym. Twierdzenie o równoważności ultranorm na skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej. Twierdzenie o zupełności skończenie wymiarowej przestrzeni ultraunormowanej.
Rozszerzanie waluacji (4 godziny) Twierdzenie Krulla o istnieniu rozszerzenia waluacji niearchimedesowej z podciała na ciało. Twierdzenie o jednoznaczności rozszerzenia waluacji z ciała niearchimedesowego na jego algebraiczne domknięcie.
O domknięciu algebraicznym ciała niearchimedesowego (4 godziny) Twierdzenie o ciele residualnym domknięcia algebraicznego ciała niearchimedesowego. Twierdzenie o grupie wartości waluacji na domknięciu algebraicznym ciała niearchimedesowego. Algebraiczne domknięcie lokalnie zwartego ciała niearchimedesowego nie jest zupełne. Uzupełnienie algebraicznego domknięcia ciała niearchimedesowego jest ciałem algebraicznie domkniętym. Definicja ciała liczb p-adycznych zespolonych $\mathbb{C}_p$ jako uzupełnienia algebraicznego domknięcia ciała liczb p-adycznych $\mathbb{Q}_p$. Ciało liczb p-adycznych zespolonych $\mathbb{C}_p$ jest algebraicznie izomorficzne z ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$.
Aproksymacja funkcji ciągłych (4 godziny) [W tym i w następnych punktach przez funkcję rozumiemy niearchimedesową funkcję tzn. funkcję określoną na pewnym podzbiorze X ciała niearchimedesowego K i przyjmującą wartości w ciele K] Definicja funkcji lokalnie stałej. Twierdzenie o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłej funkcjami lokalnie stałymi. Twierdzenie o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłej funkcjami prostymi tzn. funkcjami ciągłymi mającymi skończony zbiór wartości. Twierdzenie Kaplansky'ego o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłej wielomianami.
Funkcje pierwotne (4 godziny) Mówimy, że funkcja g jest funkcją pierwotną funkcji f , jeżeli jest różniczkowalna i jej pochodna jest równa funkcji f . Pochodna funkcji różniczkowalnej jest funkcją I klasy Baire'a. Każda funkcja I klasy Baire'a jest granicą punktową pewnego ciągu funkcji lokalnie stałych. Definicja funkcji lokalnie liniowej. Każda funkcja lokalnie stała ma funkcję pierwotną, która jest funkcją lokalnie liniową. Definicja d-zbieżności i d-granicy ciągu funkcji. Każda funkcja I klasy Baire'a ma funkcję pierwotną, która jest d-granicą pewnego d-zbieżnego ciągu funkcji lokalnie liniowych. Wobec tego funkcja f ma funkcję pierwotną wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcją I klasy Baire'a. W szczególności każda funkcja ciągła ma funkcję pierwotną. Funkcja g jest funkcją pierwotną funkcji zerowej wtedy i tylko wtedy, gdy jest d-granicą pewnego d-zbieżnego ciągu funkcji lokalnie stałych.

B. Problematyka ćwiczeń audytoryjnych

Treści merytoryczne
Liczby p-adyczne (4 godziny) Działania algebraiczne na liczbach p-adycznych. Ciągi i szeregi o wyrazach w ciele $\mathbb{Q}_p$.

Porównanie ciała liczb p-adycznych $\mathbb{Q}_p$ z ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ i z ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$.

Granica i ciągłość funkcji (6 godzin)

Definicja granicy funkcji f w punkcie.

Twierdzenie o działaniach na granicach funkcji w punkcie.

Definicja ciągłości funkcji f w punkcie.

Twierdzenie o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji ciągłych.

Twierdzenie o ciągłości funkcji złożonej.

Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej do funkcji ciągłej i różnowartościowej.

Zbiór punktów ciągłości funkcji f jest zbiorem typu G_δ w dziedzinie funkcji f . Jeżeli założymy dodatkowo, że dziedzina funkcji f jest zbiorem typu G_δ w ciele K oraz f jest funkcją I klasy Baire'a, to zbiór punktów ciągłości funkcji f jest gęsty w dziedzinie funkcji f .

Różniczkowalność funkcji (8 godzin)

Definicja różniczkowalności funkcji w punkcie oraz pochodnej funkcji w punkcie. Każdy wielomian jest funkcją różniczkowalną w każdym punkcie. Twierdzenie o różniczkowalności sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji różniczkowalnych. Twierdzenie o różniczkowalności funkcji złożonej. Przykład funkcji różnowartościowej f , która ma w każdym punkcie pochodną równą zero. Z przykładu tego wynika, że w analizie niearchimedesowej nie zachodzą twierdzenia analogiczne do twierdzeń o wartości średniej w analizie rzeczywistej.

Przykład funkcji różniczkowalnej, której pochodna w każdym punkcie jest równa 1 (a więc jest różna od zera), ale która nie jest różnowartościowa w żadnym otoczeniu pewnego punktu dziedziny.

Funkcja f jest różniczkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest d -granicą pewnego d -zbieżnego ciągu funkcji lokalnie liniowych.

Mocna różniczkowalność funkcji (6 godzin)

Definicja mocnej różniczkowalności funkcji. Własności funkcji mocno różniczkowalnej.

Twierdzenie o mocnej różniczkowalności sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji mocno różniczkowalnych. Przykład funkcji różniczkowalnej, której pochodna jest funkcją zerową (a więc funkcją ciągłą), ale która nie jest mocno różniczkowalna. Jeżeli dziedzina funkcji różniczkowalnej f jest zbiorem typu G_δ , to zbiór punktów, w których funkcja f jest mocno różniczkowalna jest gęstym zbiorem typu G_δ .

Funkcje analityczne (6 godzin)

Zbieżność szeregów potęgowych. Funkcje analityczne. Zasada maksimum. Funkcje $\exp$ i $\log$ oraz ich rozszerzenia. Funkcje trygonometryczne i cyklometryczne.

3.4 Metody dydaktyczne

Wykład – metodą tradycyjną

Ćwiczenia – metodą tradycyjną.

4. METODY I KRYTERIA OCENY

4.1 Sposoby weryfikacji efektów uczenia się

Symbol efektu	Metody oceny efektów uczenia się (np.: kolokwium, egzamin ustny, egzamin pisemny, projekt, sprawozdanie, obserwacja w trakcie zajęć)	Forma zajęć dydaktycznych (w, ćw, ...)
EK_01 - EK_21	Obserwacja studentów i dialog ze studentami w trakcie zajęć i konsultacji. Aktywność studentów na zajęciach. Odpowiedzi i wypowiedzi ustne studentów. Kolokwium. Egzamin.	WYKŁAD, ĆWICZENIA

4.2 Warunki zaliczenia przedmiotu (kryteria oceniania)

Ćwiczenia: zaliczenie na ocenę na podstawie kolokwium i aktywności na zajęciach.

Wykład: egzamin jest w formie pisemnej. Warunkiem zdania egzaminu jest uzyskanie z niego co najmniej 50% punktów. Ocena końcowa jest ustalana według skali:

- poniżej 50% pkt. – brak zaliczenia,
- [50 – 60%) pkt. – dostateczny,
- [60 – 70%) pkt. – plus dostateczny,
- [70 – 80%) pkt. – dobry,
- [80 – 90%) pkt. – plus dobry,
- [90– 100%] pkt. – bardzo dobry.

5. CAŁKOWITY NAKŁAD PRACY STUDENTA POTRZEBNY DO OSIĄGNIĘCIA ZAŁOŻONYCH EFEKTÓW W GODZINACH ORAZ PUNKTACH ECTS

Forma aktywności	Średnia liczba godzin na zrealizowanie aktywności
Godziny z harmonogramu studiów	60 (30 w +30 ćw.)
Inne z udziałem nauczyciela akademickiego (udział w konsultacjach, egzaminie)	15
Godziny niekontaktowe – praca własna studenta (przygotowanie do zajęć, egzaminu, napisanie referatu itp.)	75
SUMA GODZIN	150
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS	6

* Należy uwzględnić, że 1 pkt ECTS odpowiada 25-30 godzin całkowitego nakładu pracy studenta.

6. PRAKTYKI ZAWODOWE W RAMACH PRZEDMIOTU

wymiar godzinowy	Nie dotyczy
zasady i formy odbywania praktyk	Nie dotyczy

7. LITERATURA

Literatura podstawowa:

1. S. Katok - *p-adic analysis compared with real*, Student Mathematical Library, Mathematics Advanced Study, AMS, Providence, RI, 2007.

2. A. Robert - *A course in p -adic analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.
3. W. H. Schikhof – *Ultrametric Calculus*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1984.

Literatura uzupełniająca:

1. G. Bachman - *Introduction to p -adic numbers and valuation theory*, Academic Press, New York-London 1964.
2. S. Bosch; U. Güntzer; R. Remmert - *Non-Archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 261. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
3. F. Gouvêa - *p -adic numbers. An introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
4. N. Koblitz - *p -adic analysis: a short course on recent work*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980.
5. K. Mahler, *p -adic numbers and their functions*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1981.
6. A.H. Lightstone; A. Robinson - *Nonarchimedean fields and asymptotic expansions*, North-Holland Mathematical Library, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1975.
7. C.Perez-Garcia; W.H. Schikhof - *Locally convex spaces over non-Archimedean valued fields*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 119. Cambridge University Press, Cambridge, 2010
8. A.C. van Rooij - *Non-Archimedean functional analysis*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.
9. P.Schneider – *Nonarchimedean functional analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

Akceptacja Kierownika Jednostki lub osoby upoważnionej