

**SYLABUS**  
**DOTYCZY CYKLU KSZTAŁCENIA 2023-2026**  
(skrajne daty)  
Rok akademicki 2024/2025

**1. PODSTAWOWE INFORMACJE O PRZEDMIOCIE**

|                                                       |                                                                    |
|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| Nazwa przedmiotu                                      | Analiza matematyczna 3                                             |
| Kod przedmiotu*                                       |                                                                    |
| Nazwa jednostki prowadzącej kierunek                  | Kolegium Nauk Przyrodniczych                                       |
| Nazwa jednostki realizującej przedmiot                | Kolegium Nauk Przyrodniczych<br>Instytut Matematyki                |
| Kierunek studiów                                      | Matematyka                                                         |
| Poziom studiów                                        | studia I stopnia                                                   |
| Profil                                                | ogólnoakademicki                                                   |
| Forma studiów                                         | stacjonarne                                                        |
| Rok i semestr/y studiów                               | rok II, semestr 3 i 4                                              |
| Rodzaj przedmiotu                                     | kierunkowy                                                         |
| Język wykładowy                                       | polski                                                             |
| Koordynator                                           | dr hab. Jacek Dziok, prof. UR                                      |
| Imię i nazwisko osoby prowadzącej / osób prowadzących | dr hab. Jacek Dziok, prof. UR,<br>dr Swietłana Minczewska-Kamińska |

\* -opcjonalnie, zgodnie z ustaleniami w Jednostce

**1.1. Formy zajęć dydaktycznych, wymiar godzin i punktów ECTS**

| Semestr (nr) | Wykł. | Ćw. | Konw. | Lab. | Sem. | ZP | Prakt. | Inne (jakie?) | Liczba pkt. ECTS |
|--------------|-------|-----|-------|------|------|----|--------|---------------|------------------|
| 3            | 30    | 45  |       |      |      |    |        |               | 7                |
| 4            | 30    | 30  |       |      |      |    |        |               | 6                |

**1.2. Sposób realizacji zajęć**

- ☒ zajęcia w formie tradycyjnej  
☐ zajęcia realizowane z wykorzystaniem metod i technik kształcenia na odległość

**1.3 Forma zaliczenia przedmiotu (z toku) (egzamin, zaliczenie z oceną, zaliczenie bez oceny)**

Wykład: 3 sem. - zaliczenie bez oceny, 4 sem. egzamin,

Ćwiczenia: 3 i 4 sem. - zaliczenie na ocenę.

**2. WYMAGANIA WSTĘPNE**

|                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------|
| Znajomość rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej |
|----------------------------------------------------------------------|

### 3. CELE, EFEKTY UCZENIA SIĘ, TREŚCI PROGRAMOWE I STOSOWANE METODY DYDAKTYCZNE

#### 3.1 Cele przedmiotu

|                |                                                                                                                                                                                                        |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| C <sub>1</sub> | przekazanie wiedzy z zakresu teorii granic i rachunku różniczkowego i całkowego funkcji wielu zmiennych, ze szczególnym uwzględnieniem pojęć i twierdzeń dotyczących funkcji dwóch i trzech zmiennych, |
| C <sub>2</sub> | zapoznanie studentów z podstawowymi zastosowaniami rachunku różniczkowego i całkowego funkcji wielu zmiennych.                                                                                         |

#### 3.2 Efekty uczenia się dla przedmiotu

| EK (efekt uczenia się) | Treść efektu uczenia się zdefiniowanego dla przedmiotu                                                                                                                                                                                                                | Odniesienie do efektów kierunkowych |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| EK_01                  | student zna i rozumie podstawowe pojęcia i twierdzenia z zakresu rachunku różniczkowego i całkowego funkcji wielu zmiennych, techniki dowodowe i przykłady                                                                                                            | K_Wo1, K_Wo3                        |
| EK_02                  | student zna i rozumie podstawowe różnice pomiędzy rachunkiem różniczkowym i całkowym funkcji jednej i wielu zmiennych                                                                                                                                                 | K_Wo4, K_Wo2                        |
| EK_03                  | student potrafi poprawnie formułować definicje i twierdzenia z zakresu rachunku różniczkowego i całkowego funkcji wielu zmiennych i wykorzystywać je do badania własności funkcji wielu zmiennych, wyznaczania ekstremów i obliczania przybliżonych wartości funkcji, | K_Uo1, K_Uo2, K_Uo5                 |
| EK_04                  | student potrafi stosować rachunek całkowity funkcji wielu zmiennych w zagadnieniach geometrycznych i fizycznych: do obliczania pola powierzchni figury i płata powierzchniowego, objętości brył, masy krzywej, masy płata powierzchniowego, itp.                      | K_Uo6                               |
| EK_05                  | student jest gotów do poszerzania swojej wiedzy i doskonalenia kompetencji w zakresie rachunku różniczkowego i jego zastosowań                                                                                                                                        | K_Ko1, K_Ko2, K_Ko3                 |

#### 3.3 Treści programowe

##### A. Problematyka wykładu

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Treści merytoryczne                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Semestr 3.<br>Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych. Pochodne kierunkowe i cząstkowe funkcji wielu zmiennych. Pochodna i różniczkowalność funkcji wielu zmiennych, hiperpłaszczyzna styczna. Pochodne cząstkowe, pochodne i różniczki wyższych rzędów, wzór Taylora. Ekstrema globalne, lokalne i warunkowe funkcji wielu zmiennych. Rachunek różniczkowy odwzorowań. Pochodna złożenia odwzorowań. Pochodna skalarna i twierdzenie o lokalnym dyfeomorfizmie.<br>Funkcje uwikłane jednej i wielu zmiennych. Twierdzenie o funkcji uwikłanej. Ekstrema lokalne i globalne funkcji uwikłanych. Hiperpłaszczyzna styczna do wykresu funkcji uwikłanych. |

Semestr 4.

Całki wielokrotne. Definicja i podstawowe własności całek wielokrotnych. Interpretacja geometryczna i fizyczna. Zamiana całki wielokrotnej na całki iterowane. Twierdzenie o zamianie zmiennych. Zastosowania całek wielokrotnych.

Całki krzywoliniowe i powierzchniowe. Definicje i podstawowe własności. Twierdzenia o zamianie całki krzywoliniowej na całkę oznaczoną i całki powierzchniowej na całkę podwójną. Związek pomiędzy całką zorientowaną i niezorientowaną. Niezależność całki krzywoliniowej od drogi całkowania. Twierdzenie Greena, twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa, twierdzenie Stokesa. Zastosowania całek krzywoliniowych i powierzchniowych.

## B. Problematyka ćwiczeń

### Treści merytoryczne

Semestr 3.

Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych. Pochodne kierunkowe i cząstkowe funkcji wielu zmiennych. Pochodna i różniczkowalność funkcji wielu zmiennych, hiperpłaszczyzna styczna. Pochodne cząstkowe, pochodne i różniczki wyższych rzędów, wzór Taylora. Ekstrema globalne, lokalne i warunkowe funkcji wielu zmiennych. Rachunek różniczkowy odwzorowań. Pochodna złożenia odwzorowań. Pochodna skalarna i twierdzenie o lokalnym dyfeomorfizmie.

Funkcje uwikłane jednej i wielu zmiennych. Twierdzenie o funkcji uwikłanej. Ekstrema lokalne i globalne funkcji uwikłanych. Hiperpłaszczyzna styczna do wykresu funkcji uwikłanych.

Semestr 4.

Całki wielokrotne. Definicja i podstawowe własności całek wielokrotnych. Interpretacja geometryczna i fizyczna. Zamiana całki wielokrotnej na całki iterowane. Twierdzenie o zamianie zmiennych. Zastosowania całek wielokrotnych.

Całki krzywoliniowe i powierzchniowe. Definicje i podstawowe własności. Twierdzenia o zamianie całki krzywoliniowej na całkę oznaczoną i całki powierzchniowej na całkę podwójną. Związek pomiędzy całką zorientowaną i niezorientowaną. Niezależność całki krzywoliniowej od drogi całkowania. Twierdzenie Greena, twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa, twierdzenie Stokesa. Zastosowania całek krzywoliniowych i powierzchniowych.

## 3.4 Metody dydaktyczne

Wykład – metodą tradycyjną,

Ćwiczenia – metodą tradycyjną; rozwiązywanie zadań, praca w grupach.

## 4. METODY I KRYTERIA OCENY

### 4.1 Sposoby weryfikacji efektów uczenia się

| Symbol efektu | Metody oceny efektów uczenia się<br>(np.: kolokwium, egzamin ustny, egzamin pisemny, projekt, sprawozdanie, obserwacja w trakcie zajęć) | Forma zajęć dydaktycznych<br>(w, ćw, ...) |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| EK_01         | egzamin, sprawdziany wiedzy i obserwacja w trakcie zajęć                                                                                | wykład                                    |
| EK_02         | kolokwia, egzamin, sprawdziany wiedzy i obserwacja w trakcie zajęć                                                                      | wykład, ćwiczenia audytoryjne             |

|       |                                                                   |                               |
|-------|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| EK_03 | sprawdziany wiedzy, kolokwia, egzamin, obserwacja w trakcie zajęć | wykład, ćwiczenia audytoryjne |
| EK_04 | sprawdziany wiedzy, kolokwia, egzamin, obserwacja w trakcie zajęć | wykład, ćwiczenia audytoryjne |
| EK_05 | obserwacja w trakcie zajęć                                        | wykład, ćwiczenia audytoryjne |

#### 4.2 Warunki zaliczenia przedmiotu (kryteria oceniania)

**Zaliczenie ćwiczeń** (w każdym semestrze) odbywa się na podstawie kolokwium i aktywności na zajęciach. Warunkiem uzyskania zaliczenia ćwiczeń jest zdobycie co najmniej 50% punktów z każdego kolokwium. Ocena końcowa jest wówczas ustalana według skali:

- poniżej 50% pkt. – brak zaliczenia,
- [50 – 60%) pkt. – dostateczny,
- [60 – 70%) pkt. – plus dostateczny,
- [70 – 80%) pkt. – dobry,
- [80 – 90%) pkt. – plus dobry,
- [90– 100%] pkt. – bardzo dobry.

Aktywność na ćwiczeniach może podnieść ocenę co najwyżej o pół stopnia.

**Zaliczenie wykładu** (w każdym semestrze) odbywa się na podstawie sprawdzianów opanowania materiału wykładowego. Warunkiem uzyskania zaliczenia wykładu jest zdobycie co najmniej 50% punktów z pisanych sprawdzianów.

**Egzamin.** Studenci zdają egzamin po 4 semestrze. Warunkiem przystąpienia do egzaminu jest uzyskanie zaliczenia z wykładu i ćwiczeń. Egzamin jest w formie pisemnej i obejmuje część zadaniową i część teoretyczną. Warunkiem zdania egzaminu jest uzyskanie z niego co najmniej 50% punktów. Ocena końcowa jest wówczas ustalana według skali:

- poniżej 50% pkt. – brak zaliczenia,
- [50 – 60%) pkt. – dostateczny,
- [60 – 70%) pkt. – plus dostateczny,
- [70 – 80%) pkt. – dobry,
- [80 – 90%) pkt. – plus dobry,
- [90– 100%] pkt. – bardzo dobry.

Student, który nie zda egzaminu ma prawo do egzaminu poprawkowego pisanego na zasadach egzaminu w sesji podstawowej.

#### 5. CAŁKOWITY NAKŁAD PRACY STUDENTA POTRZEBNY DO OSIĄGNIĘCIA ZAŁOŻONYCH EFEKTÓW W GODZINACH ORAZ PUNKTACH ECTS

| Forma aktywności                                                              | Średnia liczba godzin na zrealizowanie aktywności |
|-------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Godziny z harmonogramu studiów                                                | 135                                               |
| Inne z udziałem nauczyciela akademickiego (udział w konsultacjach, egzaminie) | 20                                                |
| Godziny niekontaktowe – praca własna studenta                                 | 170                                               |

|                                                             |           |
|-------------------------------------------------------------|-----------|
| (przygotowanie do zajęć, egzaminu, napisanie referatu itp.) |           |
| SUMA GODZIN                                                 | 325       |
| <b>SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS</b>                       | <b>13</b> |

*\* Należy uwzględnić, że 1 pkt ECTS odpowiada 25-30 godzin całkowitego nakładu pracy studenta.*

## 6. PRAKTYKI ZAWODOWE W RAMACH PRZEDMIOTU

|                                  |             |
|----------------------------------|-------------|
| wymiar godzinowy                 | Nie dotyczy |
| zasady i formy odbywania praktyk | Nie dotyczy |

## 7. LITERATURA

Literatura podstawowa:

1. G.M. Fichtenholz, Rachunek różniczkowy i całkowy, t1-3, PWN Warszawa 2011.
2. F. Leja, Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych, PWN Warszawa 2008.
3. W. Kryszewski, L. Włodarski, Analiza Matematyczna w zadaniach, cz.1 i cz.2, PWN Warszawa 2008.
4. J. Banaś, S. Wędrychowicz, Zbiór zadań z analizy matematycznej, WNT 1997.
5. W. Rudin, Analiza rzeczywista i zespolona, PWN, Warszawa 1998.
6. W. Kołodziej, Analiza matematyczna, PWN, Warszawa 2009.

Literatura uzupełniająca:

7. R. Rudnicki, Wykłady z analizy matematycznej, Wydaw. Naukowe PWN, Warszawa 2006
8. A. Birkholc, Analiza matematyczna dla nauczycieli, PWN Warszawa 2002.
9. R. Sikorski, Rachunek różniczkowy i całkowy, Funkcje wielu zmiennych, PWN, Warszawa 1967.
10. M. Gwert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna. Definicje, twierdzenia, wzory. T.2i3, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2004.
11. H. i J. Musielakowie, Analiza matematyczna. T.2..Funkcje i odwzorowania wielu zmiennych Wydaw. Naukowe UAM 2003.

Akceptacja Kierownika Jednostki lub osoby upoważnionej