Recenzja osiągnięcia habilitacyjnego dr Agnieszki Chlebowicz

Rozwiązania równań całkowych typu Volterry i Hammersteina oraz nieskończonych układów tych równań

Łukasz Płociniczak
Katedra Matematyki Stosowanej, Wydział Matematyki,
Politechnika Wrocławska

24 lipca 2023

1 Sylwetka habilitantki

Pani dr Agnieszka Chlebowicz jest adiunktem pracującym w Katedrze Analizy Nieliniowej Politechniki Rzeszowskiej. Swój dyplom magistra matematyki obroniła na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Rzeszowie. Paca magisterska dotyczyła grup wolnych i napisana została pod opieką prof. Józefa Tabora. Rozprawę doktorską habilitantka obroniła w 2004 roku w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach. Temat rozprawy to *Formy wyższych stopni nad ciałami uporządkowanymi*, a promotorem był dr hab. Andrzej Sładek, prof. UŚ. Po doktoracie Pani Chlebowicz zaczęła pracować w innej dziedzinie matematyki, to jest w równaniach całkowych i złożona przez nią rozprawa habilitacyjna dotyczy właśnie tych zagadnień.

2 Omówienie osiągnięć włączonych do habilitacji

W skład rozprawy habilitacyjnej wchodzi 7 prac, z czego dwie są samodzielne. W przypadku pozostałych publikacji stosowne oświadczenia zostały dostarczone, a oszacowania wkładu pracy wynosiły około $50-60\%$ (na tyle ile jest to możliwe w pracach matematycznych). Prace zostały opublikowane w dobrych czasopismach, między innymi w Bulletin of the London Mathematical Society oraz Nonlinear Analysis A. Co ciekawe prace [H1-H2] zostały opublikowane w roku 2009, a wszystkie pozostałe włączone do habilitacji aż co najmniej dziesięć lat później. Wskazuje to, być może, na zwiększone zainteresowanie się tematem przez habilitantkę i aktywną pracę przez ostatnich kilka lat.

Autoreferat przygotowany jest starannie, a wszystkie wyniki opisane są w sposób jasny i zrozumiały. Bardzo szczegółowo jest również przedstawiona motywacja zajęcia się tematem równań całkowych - zarówno pod względem teoretycznym jak i z powodu ich licznych zastosowań w fizyce czy biologii. Cieszę się, że Pani dr Chlebowicz jest świadoma wielu zastosowań matematyki.

Głównym zagadnieniem, którym zajmuje się habilitantka jest teoria istnienia rozwiązań nieliniowych równań całkowych typu Volterry (lub Volterry-Hammersteina w szczególnych przypadkach) postaci

$$x(t) = a(t) + \int_0^t g(t, s, x(s))ds, \tag{1}$$

gdzie a oraz g są znanymi funkcjami, a x jest niewiadomą. Habilitantka używa dwóch podstawowych narzędzi: miary (słabej) niezwartości na odpowiedniej przestrzeni Banacha oraz odpowiedniego twierdzenia o punkcie stałym (zwykle różnych uogólnień twierdzenia Schaudera). Zatem podejście do istnienia (i tylko istnienia) jest typowo „zwartościowe". Formalnie rzecz biorąc miara niezwartości jest funkcją mówiącą jak daleko od zwartości jest dany zbiór (miara zbioru zwartego jest równa zero). Klasycznym przykładem takiej miary jest *miara Kuratowskiego*

$$\alpha(X) = \inf\{\epsilon > 0 : \text{zbiór } X \text{ może być pokryty skończoną liczbą kul o promieniu } \epsilon\}. \tag{2}$$

Podobną definicję posiada *miara Hausdorffa*, w której kule zastąpione są przez dowolną ϵ-sieć. Autorka w swojej habilitacji rozważa uogólnienia tego pomysłu na przestrzenie ciągowe i funkcyjne oraz abstrakcyjne przestrzenie Banacha.

Prace [H1] oraz [H2] są bardzo do siebie podobne i różnią się równaniem, którego rozwiązania poszukujemy. W [H1] jest to rzeczywiście (1), natomiast w [H2] habilitantka rozważa równanie całkowo-funkcyjne

$$x(t) = f_1\left(t, \int_0^t k(t, s) f_2(s, x(s))ds\right). \tag{3}$$

Oczywiste jest, że (1) nie jest uogólnieniem (3), ani na odwrót, jednak mają one „wspólnego przodka" jakim jest równanie Volterry-Hammersteina (gdy $g(t, s, x) = k(t, s)x$ oraz $f_1(t, y) = a(t) + y$). Zatem nie są one zbyt odległe od siebie w sensie struktury. Pokrótce omówię jedynie wyniki z [H1], ponieważ te z pacy [H2] są bardzo podobne. Chciałbym zaznaczyć, że zgodnie z oświadczeniami dołączonymi do rozprawy to właśnie Pani dr Chlebowicz jest autorką zasadniczych wyników opublikowanych w tych pracach. Habilitantka pokazuje istnienie rozwiązań badanych równań w przestrzeni $L^1(\mathbb{R}_+)$ przy słabych założeniach: warunki Carathéodory'ego oraz liniowy wzrost nieliniowości $|v(t, s, x) \le k(t, s)(p(s) + q|x|)$. Dodatkowo wymaga się, aby całkowy liniowy operator generowany przez tak powstałe jądro k odwzorowywał przestrzeń L^1 samą w siebie i żeby jego norma była odpowiednio mała ([H1], Sec. 4, (i-iv)). O ile pierwszy zestaw założeń jest zwykle bardzo łatwy do sprawdzenia, to drugi może stanowić problem dla bardziej skomplikowanych jąder. Niemniej należy uznać, że te warunki są jak najbardziej naturalne i trudno byłoby znaleźć bardziej odpowiedni ich zbiór. W wielkim skrócie dowód istnienia polega na znalezieniu odpowiedniego wypukłego, zwartego i niepustego zbioru w $L^1(\mathbb{R}_+)$ i zastosowanie doń twierdzenia Schaudera. Oczywiście sama konstrukcja takiego zbioru jest wysoce nietrywialna i wymaga wykonania szeregu bardzo technicznych obliczeń i subtelnych rozumowań. Na początku wybiera się odpowiednio małą kulę tak, aby była ona odwzorowana w samą siebie przez operator stowarzyszony z równaniem całkowym (tu przydaje się założenie o małości normy operatora całkowego generowanego przez k). Pokazując dalej, że operator ten jest kontrakcją w sensie miary słabej niezwartości można iteracyjnie wygenerować ciąg zstępujących zbiorów, którego przekrój jest niepusty. Stąd, biorąc otoczki wypukłe jesteśmy w stanie sprawdzić wszystkie założenia twierdzenia Schaudera. Kluczowym jest pokazanie, że kandydat na zbiór, w którym istnieje rozwiązanie jest zwarty. Jest to najtrudniejsza i najdłuższa część dowodu zawierająca liczne subtelności. Kluczowym jest tutaj wykorzystanie w pewnym sensie uogólnienia twierdzenia Arzeli-Ascoliego i faktu, że zbiór jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest słabo zwarty i zwarty według miary. Cieszy fakt, że zarówno w [H1] jak i [H2] habilitantka podaje kilka konkretnych przykładów równań, dla których można zastosować udowodnione twierdzenie. Jak wspomniałem wcześniej praca [H2] jest bardzo podobna do [H1] zarówno w strukturze oraz technice dowodowej, co poniekąd jest słabą stroną tej części dzieła habilitacyjnego bo zasadniczy wkład koncepcyjny [H1]+[H2] w dyscyplinę jest taki sam.

Praca [H3] rozpoczyna kolejny cykl artykułów zajmujących się badaniem tym razem nieskończonych układów równań całkowych Volterry-Hammersteina. Takie układy są bardzo interesującym obiektem badań egzystencjalnych. Widać również, że pojęcie miary niezwartości, jej uogólnień oraz konkretnych przykładów, nabiera głębokiego znaczenia właśnie w pracach [H3-H7]. W szczególności habilitantka szuka rozwiązań badanych równań w naturalnej przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$, czyli funkcji ograniczonych z odcinka czasowego $[0, \infty)$ do ciągowej przestrzeni Banacha E (na przykład c_0, l^p, itp.). Co ciekawe, w takich przestrzeniach miarę niezwartości można często podać za pomocą jawnego wzoru. Konstrukcję takich jawnych reprezentacji można przeprowadzić znając miarę Hausdorffa, co zostało zrobione w pracy [H3]. Zgodnie z oświadczeniem ciężko tutaj ocenić bezpośredni wkład Autorki - co zresztą nie jest niczym niezwykłym w pracach matematycznych, gdzie wszyscy współautorzy pracują nad danym wynikiem. Jednak udział habilitantki szacuje się tutaj na 60%. Wydaje się, że ta praca ma zasadnicze znaczenie dla całego cyklu [H3-H7] gdyż w niej pojawiają się podstawowe idee służące dalszym zastosowaniom w twierdzeniach egzystencjalnych. Te, z kolei opierają się na uogólnieniu twierdzenia Schaudera zwanym twierdzeniem Darbo o punkcie stałym. Niech X będzie niepustym, ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha, a μ miarą niezwartości. Jeśli ciągły operator $A : X \mapsto X$ spełnia $\mu(AY) \leq \lambda\mu(Y)$ dla $0 \leq k < 1$, $Y \subseteq X$, to posiada co najmniej jeden punkt stały w X. Zatem z twierdzenia Darbo wynika, że założenie zwartości zbioru X możemy zastąpić przez wymaganie konkrakcji ze względu na pewną miarę niezwartości. W pracy [H3] przedstawiona jest metoda konstruowania wszelakich tego typu miar. Operator A pełni rolę operatorów generowanych przez odpowiednie równania całkowe, zatem wszelkie twierdzenia egzystencjalne otrzymane w pracach [H3-H7] opierają się na sprawdzeniu czy dla danych miar niezwartości założenia twierdzenia Darbo są spełnione. Według mojej oceny różnice pomiędzy tymi pracami są subtelne i chciałbym krótko je omówić. W pracy [H3] rozważany jest układ równań

$$x_n(t) = a_n(t) + f_n(t, x_n(t), x_{n+1}(t), ...) \int_0^t k_n(t,s) g_n(x_1(s), x_2(s), ...) ds, \tag{4}$$

a znalezionym rozwiązaniem jest ciąg w $E = c_0$, to znaczy podstawowa przestrzeń funkcyjna to $BC(\mathbb{R}_+, c_0)$. W pracy [H4] (samodzielnej) wynik ten jest wzmocniony do $E = l^1$, co jest ciekawym rezultatem. Jak zwykle konkretne przykłady układów równań są również podane. Założeń głównych twierdzeń nie będę tutaj omawiał ponieważ są one techniczne i jest ich dosyć sporo, jednak trzeba zauważyć, że są one dosyć naturalne. W pracy [H6] (samodzielnej) pokazane jest analogiczne twierdzenie w przypadku gdy współczynnik przy całce w powyższym wzorze może zależeć od wszystkich niewiadomych, to znaczy

$$x_n(t) = a_n(t) + f_n(x, t, x_1(t), x_2(t), ...) \int_0^t k_n(t,s) g_n(x_1(s), x_2(s), ...) ds. \tag{5}$$

Znalezione rozwiązanie również leży w l^1 i pokazane tam twierdzenie jest w naturalny sposób uogólnieniem wyników z [H3-H4].

Zasadnicze różnice między pracami [H5] i [H7], a [H3-4] oraz [H6] polegają na wyborze miar niezwartości (tutaj oświadczenia mówią jasno o zdecydowanym wkładzie koncepcyjnym habilitantki). W szczególności w tych ostatnich pracach konstruuje się miary przy założeniu, że danej przestrzeni Banacha istnieje już jawna postać miary niezwartości Hausdorffa. Jest to duże ograniczenie, które zostaje usunięte w pracach [H5] oraz [H7]. Według mnie głównym wynikiem publikacji [H5] jest zręczne obejście wymogu posiadania jawnej postaci formuły na miarę niezwartości, a jednocześnie analogiczną konstrukcję wielu miar przydatnych do późniejszego zastosowania twierdzenia Darbo. Wyniki prac [H5] i [H7] są ciekawe, bo oprócz konstrukcji wyżej wspomnianych miar, pokazuje się silny wynik mówiący o istnieniu jednostajnie ciągłych rozwiązań w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l^\infty)$ (w [H7] to rozwiązanie posiada nawet granicę w l^∞).

Chciałbym teraz podsumować moje zasadnicze uwagi dotyczące osiągnięcia habilitacyjnego.

1. Habilitantka pokazuje swoją biegłość w operowaniu, konstruowaniu oraz zastosowaniach miar niezwartości. Szczególnie widać to w pracach [H5] i [H7].

2. Głównym mankamentem rozprawy habilitacyjnej jest duże podobieństwo wyników pomiędzy cyklami prac. To znaczy wyniki w każdym ze zbiorów: {[H1],[H2]}, {[H3],[H4],[H6]} oraz {[H5],[H7]} są bardzo do siebie podobne i różnią się jedynie lekkim wzmocnieniem tezy, inną klasą równań całkowych czy założeniami. Być może liczbę prac w rozprawie można by było zredukować. Sama konstrukcja wszystkich przedstawionych prac jest bardzo podobna.

3. Rozumiem, że głównym zamierzeniem habilitantki jest pokazywanie istnienia rozwiązań. Wydaje mi się jednak, że czytelnik bardzo chciałby poznać sytuację związaną z jednoznacznością: czy jest ona rzadkim zjawiskiem, czy może bardzo trudnym do pokazania? Odniesienia do literatury oraz przykłady byłyby cennym dodatkiem do opublikowanych prac czy nawet autoreferatu.

4. Zgodnie z oświadczeniami współautorów oraz po lekturze opublikowanych prac wchodzących w skład dzieła habilitacyjnego uważam, że zasadnicze wyniki z całą pewnością należą do habilitantki.

Ostatecznie moja ocena osiągnięcia habilitacyjnego Pani dr Chlebowicz jest pozytywna. Mimo dość dużego problemu związanego z punktem 2 w powyższej liście, habilitantka pokazała samodzielność w dochodzeniu do nowych wyników dla coraz to szerszej klasy równań całkowych. Na zdecydowanie dobrą ocenę zasługuje techniczna biegłość autorki w manipulowaniu oraz konstruowaniu miar niezwartości. Jest to ciekawa technika prowadząca do uzyskiwania mocnych twierdzeń egzystencjalnych o słabych założeniach.

Ten fakt, według mnie, lekko przeważa nad punktem 2 z powyższej listy uwag i skłania do pozytywnej oceny rozprawy habilitacyjnej. Uważam, że suma dokonań habilitantki stanowi pewien istotny wkład w teorię równań całkowych.

3 Omówienie pozostałych osiągnięć

Co ciekawe pozostałe, nieuwzględnione w habilitacji, publikacje autorki zostały opublikowane średnio gorzej niż [H1-H7]. Na uwagę zasługuje jednak różnorodność tematyki, która zajmowała się habilitantka. Prace [P1-P4] dotyczą algebry i zostały opublikowane przed doktoratem. Publikacje [P5-P8] dotyczą zagadnień związanych z równaniami całkowymi jednak innej klasy niż badane z habilitacji. Na uwagę zasługuje praca [P8], która powstała w trakcie współpracy habilitantki z prof. Kishinem Sadarangani z Hiszpanii oraz prof. Mohamedem Darwish z Arabii Saudyjskiej. Ten pierwszy współautor jest bardzo znanym światowym autorytetem w równaniach całkowych, co wskazuje na to, że Pani dr Chlebowicz potrafi nawiązywać międzynarodowe kontakty z naprawdę światowej klasy matematykami. Prace [P7] i [P8] dotyczą równań całkowych typu Erdélyi-Kobera, które to posiadają słabo osobliwe jądra i pojawiają się, na przykład, przy badaniu anomalnych dyfuzji. W bazie Scopus habilitantka posiada 13 prac, które zostały cytowane 82 razy bez autocytowań. Jak na stosunkowo wąską dziedzinę jest to raczej dobry wynik.

Habilitantka nie posiada bardzo rozbudowanej aktywności konferencyjnej. Na uwagę zasługuje referat na *International Conference on Theory, Methods and Applications of Nonlinear Equations* w Teksasie oraz współorganizowanie sesji na międzynarodowej konferencji *Joint Meeting of UMI, SIMAI and PTM*. Autorka brała też udział w pracach komitetu organizacyjnego konferencji *Methods of Nonlinear Analysis in Differential and Integral Equations*, która odbyła się w Rzeszowie. Z kolei aktywność dydaktyczna habilitantki jest spora: pełniła funkcję prodziekana ds. kształcenia, była promotorem wielu prac licencjackich oraz magisterskich, prowadziła liczne kursy (w tym monograficzne!), organizowała wykłady popularnonaukowe, a także jest współautorem skryptu dla studentów. Ten obszar działalności habilitantki oceniam wysoko.

Wśród innej aktywności międzynarodowej, w tym wyjazdów w celu wykonywania badań, można doszukać się tylko jednego krótkiego pobytu na Uniwersytecie w Würzburgu. Jest to niestety bardzo mało jeśli chodzi o tego typu aktywność.

Bieżąca ustawa wymaga aby habilitant wykazał się *istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej* (Art. 219. Ust. 3)). Uważam, że Pani dr Chlebowicz minimalnie spełnia to wymaganie gdyż sama zatrudniona była na kilku uczelniach (Uniwersytet Śląski, Uniwersytet w Rzeszowie) oraz współpracowała z kilkoma matematykami z uczelni zagranicznych, czego dowodem są publikacje (prof. Sadarangani, prof. Taoudi, prof. Darwish). Zatem ten warunek konieczny uznaję za spełniony.

4 Konkluzja

Biorąc pod uwagę wkład habilitantki w rozwój dziedziny nieliniowych równań całkowych opisany w części drugiej niniejszej recenzji oraz pozostałe dokonania autorki opisane w części trzeciej uznaję, że spełnia ona wymogi stawiane kandydatom do stopnia doktora habilitowanego. W szczególności uważam, że Pani dr Chlebowicz spełnia wymagania podane w art. 219 ust. 1, 2 i 3 ustawy z dn. 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.). **Wnioskuję zatem o dopuszczenie Pani dr Agnieszki Chlebowicz do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora habilitowanego.**

....

dr hab. inż. Łukasz Płociniczak, prof. PWr