Uniwersytet Rzeszowski
al. Rejtana 16c
35-959 Rzeszów
za pośrednictwem:
Rady Doskonałości Naukowej
pl. Defilad 1
00-901 Warszawa
(Pałac Kultury i Nauki, p. XXIV, pok. 2401)

Agnieszka Chlebowicz
Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej
Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza

Wniosek

z dnia 14 lutego 2023 roku

o przeprowadzenie postępowania w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie **nauk ścisłych i przyrodniczych** w dyscyplinie[1] **matematyka**.

Określenie osiągnięcia naukowego będącego podstawą ubiegania się o nadanie stopnia doktora habilitowanego:

cykl artykułów zatytułowany: **Rozwiązania równań całkowych typu Volterry i Hammersteina oraz nieskończonych układów tych równań**.

Wnioskuję – na podstawie art. 221 ust. 10 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 zm.) – aby komisja habilitacyjna podejmowała uchwałę w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego w głosowaniu **~~tajnym~~/jawnym***[2].

Zostałem poinformowany, że:

Administratorem w odniesieniu do danych osobowych pozyskanych w ramach postępowania w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego jest Przewodniczący Rady Doskonałości Naukowej z siedzibą w Warszawie (pl. Defilad 1, XXIV piętro, 00-901 Warszawa).

Kontakt za pośrednictwem e-mail: kancelaria@rdn.gov.pl, tel. 22 656 60 98 lub w siedzibie organu.

Dane osobowe będą przetwarzane w oparciu o przesłankę wskazaną w art. 6 ust. 1 lit. c) Rozporządzenia UE 2016/679 z dnia z dnia 27 kwietnia 2016 r. w związku z art. 220 - 221 oraz art. 232 – 240 ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku - Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, w celu przeprowadzenie postępowania o nadanie stopnia doktora habilitowanego oraz realizacji praw i obowiązków oraz środków odwoławczych przewidzianych w tym postępowaniu.

Szczegółowa informacja na temat przetwarzania danych osobowych w postępowaniu dostępna jest na stronie www.rdn.gov.pl/klauzula-informacyjna-rodo.html

Agnieszka Chlebowicz
....
(podpis wnioskodawcy)

[1] Klasyfikacja dziedzin i dyscyplin wg. rozporządzenia Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 20 września 2018 r. w sprawie dziedzin nauki i dyscyplin naukowych oraz dyscyplin w zakresie sztuki (Dz. U. z 2018 r. poz. 1818).
[2] * Niepotrzebne skreślić.

Załączniki (w wersji elektronicznej):

1. Dane wnioskodawcy.
2. Kopia dokumentu potwierdzającego posiadanie stopnia doktora.
3. Autoreferat.
4. Wykaz osiągnięć naukowych.
5. Oświadczenia współautorów prac [H1], [H2], [H3], [H5], [H7].
6. Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia naukowego.
7. Kopia zaproszenia na wykład w Uniwersytecie w Würzburgu, Niemcy.

dr Agnieszka Chlebowicz
Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej
Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza

Autoreferat

1. Imię i nazwisko

Agnieszka Chlebowicz

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe

dyplom magistra matematyki uzyskany 30 czerwca 1995 r. na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Rzeszowie
tytuł pracy magisterskiej: Grupy wolne
promotor: prof. dr hab. Józef Tabor

stopień naukowy doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki nadany uchwałą Rady Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach z dnia 8 czerwca 2004 r.
tytuł rozprawy doktorskiej: Formy wyższych stopni nad ciałami uporządkowanymi
promotor: dr hab. Andrzej Sładek, prof. UŚ

3. Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

1.10.1994 - 30.06.1995 – stażysta w Katedrze Matematyki Politechniki Rzeszowskiej
1.10.1995 - 31.08.2004 – asystent w Katedrze Matematyki Politechniki Rzeszowskiej
1.07.2004 - 30.06.2016 – adiunkt w Katedrze Matematyki Politechniki Rzeszowskiej
1.10.2007 - 30.06.2012 – starszy wykładowca w Instytucie Inżynierii Technicznej Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej w Jarosławiu
1.07.2016 - 31.12.2019 – adiunkt w Katedrze Analizy Nieliniowej Politechniki Rzeszowskiej
1.01.2020 - 31.12.2021 – profesor uczelni w Katedrze Analizy Nieliniowej Politechniki Rzeszowskiej
1.01.2022 - obecnie – adiunkt w Katedrze Analizy Nieliniowej Politechniki Rzeszowskiej

4. Omówienie osiągnięć naukowych

Osiągnięcia naukowe, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.) tworzą cykl siedmiu powiązanych tematycznie artykułów naukowych zatytułowany

Rozwiązania równań całkowych typu Volterry i Hammersteina oraz nieskończonych układów tych równań,

w skład którego wchodzą następujące publikacje:

[H1] J. Banaś, A. Chlebowicz, *On integrable solutions of a nonlinear Volterra integral equation under Carathéodory conditions*, Bull. Lond. Math. Soc. 41 (2009), 1073-1084.

[H2] J. Banaś, A. Chlebowicz, *On existence of integrable solutions of a functional integral equation under Carathéodory conditions*, Nonlinear Anal. 70 (2009), 3172-3179.

[H3] J. Banaś, A. Chlebowicz, *On solutions of an infinite system of nonlinear integral equations on the real half-axis*, Banach J. Math. Anal. 13 (2019), no. 4, 944-968.

[H4] A. Chlebowicz, *Solvability of an infinite system of nonlinear integral equations of Volterra-Hammerstein type*, Adv. Nonlinear Anal. 2020; 9: 1187-1204.

[H5] J. Banaś, A. Chlebowicz, W. Woś, *On measures of noncompactness in the space of functions defined on the half-axis with values in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. 489 (2020) 124187.

[H6] A. Chlebowicz, *Existence of solutions to infinite systems of nonlinear integral equations on the real half-axis*, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2021 (2021), No. 61, pp. 1-20.

[H7] J. Banaś, A. Chlebowicz, M.-A. Taoudi, *On solutions of infinite systems of integral equations coordinatewise converging at infinity*, J. Appl. Anal. Comput. 2022, 12(5): 1901-1921.

4.1. Wprowadzenie

Równanie całkowe to równanie, w którym nieznana funkcja $x(t)$ pojawia się pod znakiem całki. Jeśli funkcja $x(t)$ występuje pod całką w sposób liniowy, to równanie nazywamy liniowym, gdy zaś funkcja ta pojawia się pod całka w zależności nieliniowej, równanie całkowe nazywamy równaniem całkowym nieliniowym.

Liniowe równania całkowe pojawiały się w badaniach naukowych już w wieku XVIII, jednak za początek systematycznego rozwoju badań nad równaniami całkowymi można przyjąć lata przełomu XIX i XX wieku. Za twórców teorii równań całkowych uznaje się Vito Volterrę (1860-1940) i Erika Ivara Fredholma (1866-1927), a także Davida Hilberta (1862-1943) i Erika Erharda Schmidta (1876-1959). W roku 1903 w czasopiśmie *Acta Mathematica* ukazała się przełomowa praca szwedzkiego matematyka Erika Ivara Fredholma *Sur une classe d'équations fonctionelles* [25], w której autor zajmuje się rozwiązalnością liniowego równania całkowego postaci

$$x(t) = f(t) + \int_0^1 k(t,s)x(s)ds,$$

gdzie $f(t)$ i $k(t,s)$ są znanymi funkcjami, zaś $x(t)$ jest szukaną funkcją. Klasa równań całkowych, którymi zajmował się Fredholm nosi na jego cześć nazwę równań Fredholma. Drugą istotną i znaną klasę równań całkowych tworzą tzw. równania całkowe Volterry, którymi jako pierwszy zajmował się matematyk włoski Vito Volterra. Rozpoczął on swoje badania nad równaniami całkowymi już w roku 1884, jednak dopiero w roku 1896 ukazały się trzy prace, w których Volterra zebrał wyniki swoich badań [54, 55, 56]. Natomiast nazwa równanie całkowe Volterry została wprowadzona przez rumuńskiego matematyka Traiana Lalescu w roku 1908 i funkcjonuje do dnia dzisiejszego [57]. Znaczący wkład w rozwój teorii liniowych równań całkowych miał również David Hilbert, słynny matematyk niemiecki, który w roku 1912 opublikował książkę *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* [32].

Na książkę tą złożyło się sześć prac Hilberta opublikowanych w latach 1904-1910 w Göttinger Nachrichten, w których przedstawił on podstawy teorii liniowych równań całkowych.

Następnym etapem rozwoju teorii równań całkowych było rozszerzenie badań na równania całkowe nieliniowe. Pierwsza praca z zakresu nieliniowych równań całkowych [30] została opublikowana przez niemieckiego matematyka Adolfa Hammersteina w roku 1930. W latach trzydziestych i czterdziestych XX wieku oprócz Hammersteina badania w tej dziedzinie prowadzili R. Iglisch [36], M. Golomb [28] oraz C. L. Dolph [23]. Zauważalny rozwój teorii równań całkowych rozpoczął się w latach pięćdziesiątych XX wieku, a już od lat sześćdziesiątych zainteresowanie teorią równań całkowych osiągnęło niespotykany poziom. Wielu naukowców w różnych krajach (USA, Włochy, Indie, Japonia, Finlandia, Rumunia, Polska) pracowało nad wieloma problemami teorii operatorów całkowych i równań całkowych. To rosnące zainteresowanie wynikało z dwóch głównych przyczyn - z jednej strony z licznych zastosowań, jakie znalazły równania całkowe w modelowaniu zjawisk w różnych dziedzinach badań, zaś z drugiej strony tak duży wzrost zainteresowania równaniami całkowymi wynikał z rozwoju analizy nieliniowej, która dostarczała nowych metod i narzędzi do badania równań całkowych (teoria punktu stałego, teoria stopnia).

Główny problem, który został zbadany w pracach [H1] - [H7] to rozwiązalność pewnych typów nieliniowych równań całkowych typu Volterry, pewnych równań funkcyjno-całkowych oraz nieskończonych układów nieliniowych równań całkowych typu Volterry-Hammersteina. W pracach [H1] oraz [H2] w celu wykazania istnienia rozwiązań dla wspomnianych równań całkowych wykorzystujemy miarę słabej niezwartości wprowadzoną w pracach [6, 9]. Natomiast do pokazania istnienia rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych na $\mathbb{R}_+$ wprowadzamy nowe miary niezwartości w przestrzeni Banacha funkcji ciągłych i ograniczonych na $\mathbb{R}_+$ o wartościach w przestrzeni Banacha z zadaną miarą niezwartości (prace [H3] i [H5]) oraz pokazujemy zastosowania tych miar niezwartości (prace [H3] - [H7]).

Opiszę teraz powyższe rodzaje równań oraz przedstawię motywację podjętych badań. Równania całkowe Volterry charakteryzują się tym, że co najmniej jedna granica całkowania jest zmienną. W nieliniowym całkowym równaniu Volterry drugiego rodzaju nieznana funkcja $x(t)$ występuje zarówno pod całką, jak i poza całką, równanie takie możemy zapisać w postaci

$$x(t) = a(t) + \int_0^t g(t, s, x(s))ds,$$

gdzie $a(t)$ i $g(t, s, x)$ są znanymi funkcjami, zaś $x(t)$ jest szukaną funkcją ([18, 44]). Zazwyczaj przyjmujemy, że rozwiązanie $x(t)$ jest funkcją określoną na przedziale $[a, b]$ (lub na przedziale $[a, \infty)$) takim, że $g(t, s, x(s))$ jest określona i całkowalna na tym przedziale i taka, że równanie całkowe jest spełnione dla tego rozwiązania. Jeżeli w powyższym równaniu funkcja $g(t, s, x)$ jest postaci $g(t, s, x) = k(t, s)G(s, x)$, to odpowiadające równanie Volterry

$$x(t) = a(t) + \int_0^t k(t, s)G(s, x(s))ds$$

nazywamy równaniem całkowym Volterry typu Hammersteina lub krótko równaniem całkowym Volterry-Hammersteina ([18]).

Nieliniowe równania całkowe typu Volterry i typu Volterry-Hammersteina pełnią ważną rolę w zastosowaniach, gdyż pozwalają opisać różne zjawiska wystepujące w świecie realnym, np. w fizyce, ekonomii, naukach inżynieryjnych i w innych dziedzinach. W szczególności równania te służą np. do modelowania wzrostu populacji [15, 16, 17, 20, 19], w procesach dyskretyzacji [49, 50], w wiskozymetrii [33], w analizie procesów wymiany ciepła [4, 38, 43, 47], w opisie odwróconego równania ciepła [41], w analizie wybuchających rozwiązań równania

[51, 48], w modelowaniu systemów rozwijających się [5], w zagadnieniu tzw. American Option Pricing [37], w teorii sterowania optymalnego [29] czy w innych dziedzinach [21, 34, 35].

Szczególnie istotną rolę w autoreferacie pełnią nieskończone układy równań całkowych typu Volterry-Hammersteina. Teoria nieskończonych układów równań całkowych jest ważną gałęzią analizy nieliniowej. Nieskończone układy równań całkowych są naturalnym uogólnieniem nieskończonych układów równań różniczkowych i podobnie jak równania całkowe, znajdują zastosowania do wielu problemów realnego świata. Z drugiej strony, nieskończone układy równań całkowych są szczególnymi przypadkami równań całkowych w przestrzeniach Banacha, tak więc wiele problemów dotyczących nieskończonych układów równań całkowych tworzy naturalne realizacje ogólnej teorii równań całkowych w przestrzeniach Banacha. Jednak tzw. teoria egzystencjalna dotycząca nieskończonych układów równań całkowych nie jest jak dotąd zbadana w wystarczającym stopniu. W teorii tej użytecznym narzędziem jest miara niezwartości, którą opisujemy szerzej w podrozdziałach 4.2. i 4.3. W roku 2001 ukazała się praca [10], w której autorzy Banaś i Lecko zastosowali miarę niezwartości do uzyskania rezultatu o istnieniu rozwiązania dla nieskończonego układu równań różniczkowych w klasycznych ciągowych przestrzeniach Banacha c_0, c i l_1. Uogólnienie wyniku Banasia i Lecko na przestrzenie l_p ciągów absolutnie sumowalnych z p-tą potęgą przedstawili Mursaleen i Mohiuddine w pracy [46]. Aghajani i Pourhadi [3] zastosowali twierdzenie o punkcie stałym typu Darbo i otrzymali twierdzenie egzystencjalne w przestrzeni l_1 dla nieskończonego układu równań różniczkowych drugiego rzędu. Podobny rezultat otrzymali Mohiuddine, Srivastava i Alotabi [45] w bardziej ogólnym przypadku (dla przestrzeni l_p). Pierwszą, na nasz stan wiedzy, pracą dotyczącą nieskończonych układów równań całkowych była praca [11] z roku 2001, w której autorzy sformułowali i udowodniki twierdzenie o istnieniu rozwiązań dla klasy nieskończonych układów równań całkowych (wykorzystując twierdzenie Schaudera). Niektórzy autorzy badali układy dwóch równań nieliniowych w przestrzeni Banacha [1, 2]. W roku 2018 Hazarika, Srivastava, Arab i Rabbani opublikowali pracę [31], w której udowodnili istnienie rozwiązań dla nieskończonego układu nieliniowych równań całkowych w przestrzeniach l_p $(p > 1)$ za pomoca technik związanych z miarą niezwartości oraz uogólnionego twierdzenia Meir-Keeler o punkcie stałym. W roku 2019 ukazała się praca [H3] wchodzaca w skład mojego osiągnięcia naukowego, będąca pierwszą publikacją, w której skonstruowano miarę niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$, gdzie E jest przestrzenią Banacha z miarą niezwartości Hausdorffa. W pracach [H3], [H4] i [H6] opisaliśmy zastosowania związane z tą miarą niezwartości. Natomiast praca [H5] jest pierwszą publikacją opisującą konstrukcję miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$, gdzie E oznacza przestrzeń Banacha z dowolną miarą niezwartości. W [H5] oraz w [H7] zastosowaliśmy skonstruowaną miarę niezwartości do udowodnienia istnienia rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$.

4.2. Rozwiązalność nieliniowego równania całkowego Volterry w przestrzeni funkcji całkowalnych ([H1,H2])

Rozpocznę od opisania pewnych faktów dotyczących przestrzeni funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a na zadanym podzbiorze zbioru $\mathbb{R}$. Załóżmy więc, że A jest niepustym, mierzalnym podzbiorem zbioru $\mathbb{R}$. Oznaczmy przez $L^1(A)$ klasyczną przestrzeń wszystkich funkcji rzeczywistych, które są określone i całkowalne w sensie Lebesgue'a na zbiorze A. W zbiorze $L^1(A)$ wprowadzamy standardową normę wzorem

$$||x|| = ||x||_{L^1(A)} = \int_A |x(t)|\, dt.$$

Zbiór $L^1(A)$ wraz z tak określoną normą tworzy przestrzeń Banacha, którą nazywamy przestrzenią Lebesgue'a. W szczególnym przypadku, gdy $A = \mathbb{R}_+$, otrzymujemy przestrzeń $L^1(\mathbb{R}_+)$, którą oznaczamy symbolem L^1. Przypomnijmy następujące kryterium na zwartość zbioru w przestrzeni $L^1(A)$.

Twierdzenie 1 ([H1, Theorem 2.3.]). *Załóżmy, że X jest ograniczonym podzbiorem przestrzeni $L^1(A)$. Wtedy X jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest słabo zwarty i zwarty według miary.*

Dalej, ustalmy przedział $I \subset \mathbb{R}$ (ograniczony lub nie) i oznaczmy przez $S(I)$ zbiór wszystkich funkcji $x : I \to \mathbb{R}$ mierzalnych w sensie Lebesgue'a. W zbiorze $S(I)$ wprowadzamy metrykę wzorem

$$\varrho_S(x, y) = \inf\{a + m(\{s \in I : |x(s) - y(s)| \geqslant a\}) \, : \, a > 0\},$$

gdzie $x, y \in S(I)$ oraz symbol $m(A)$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru A. Zbiór $S(I)$ z tak określoną metryką jest przestrzenią metryczną zupełną, jeżeli utożsamimy funkcje równe prawie wszędzie na I. Dla nas istotny jest fakt, iż zbieżność generowana przez metrykę ϱ_S pokrywa się ze zbieżnością według miary na przedziale I. W przestrzeni $S(I)$ znane jest następujące kryterium na zwartość (czyli kryterium na zwartość według miary) podane przez Frécheta [24]:

Twierdzenie 2 ([H1, Theorem 2.1.]). *Podzbiór X przestrzeni $S(I)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:*

(1) X jest jednostajnie quasiograniczony, czyli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego $x \in X$ istnieje zbiór $D_x \subset I$ taki, że $m(D_x) \leqslant \varepsilon$ i $\sup\{|x(t)| \, : \, t \in I \setminus D_\varepsilon\} \leqslant \delta$.

(2) X jest równomierzalny, tzn. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje podział $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ przedziału I taki, że dla każdego $x \in X$ istnieje zbiór $D_x \subset I$ taki, że $m(D_x) \leqslant \varepsilon$ oraz $\sup\{|x(t) - x(s)| \, : \, t, s \in I_i \setminus D_x\} \leqslant \varepsilon$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$.

Następnie, pamiętając, że I jest dowolnym przedziałem rzeczywistym, rozważmy funkcję $f(t, x) = f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. O funkcji f mówimy, że spełnia warunki Carathéodory'ego (lub jest funkcją Carathéodory'ego), gdy f jest mierzalna ze względu na zmienną t dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ oraz jest ciągła ze względu na zmienną x dla prawie wszystkich $t \in I$. Strukturę funkcji spełniających warunki Carathéodory'ego opisuje poniższe twierdzenie Scorza-Dragoni [53].

Twierdzenie 3 ([H1, Theorem 2.4., H2, Theorem 2.2.]). *Niech I będzie przedziałem ograniczonym oraz niech $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą warunki Carathéodory'ego. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje domknięty podzbiór D_ε przedziału I taki, że $m(I \setminus D_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ i $f\,|_{D_\varepsilon \times \mathbb{R}}$ jest ciągła.*

Z każdą funkcją f spełniającą warunki Carathéodory'ego możemy skojarzyć operator superpozycji F (zwany inaczej operatorem Niemytskiego) określony następująco: każdej rzeczywistej funkcji $x = x(t)$ mierzalnej na I przyporządkowujemy funkcję Fx daną wzorem $(Fx)(t) = f(t, x(t))$ dla $t \in I$. Wtedy funkcja Fx jest również mierzalna na przedziale I. Często mówimy też, że operator F jest generowany przez funkcję f. Oczywiście operator superpozycji możemy w szczególności zdefiniować na przestrzeni Lebesgue'a. Najważniejszą własność operatora superpozycji w przestrzeni Lebesgue'a opisuje poniższe twierdzenie [7, 39].

Twierdzenie 4 ([H2, Theorem 2.1.]). *Niech I będzie przedziałem rzeczywistym. Operator superpozycji F generowany przez funkcję Carathéodory'ego $f(t, x)$ odwzorowuje przestrzeń $L^1(I)$ w siebie i jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy $|f(t, x)| \leqslant a(t) + b|x|$ dla wszystkich $t \in I$ i wszystkich $x \in \mathbb{R}$, gdzie a jest funkcją określoną na $L^1(I)$, zaś b jest stałą nieujemną.*

Przypomnimy teraz podstawowe fakty dotyczące liniowego operatora całkowego Volterry w przestrzeni Lebesgue'a $L^1 = L^1(\mathbb{R}_+)$. Oznaczmy $\Delta = \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ oraz załóżmy, że funkcja $k(t,s) = k : \Delta \to \mathbb{R}$ jest mierzalna względem obydwu zmiennych. Dla dowolnej funkcji $x \in L^1$ definiujemy liniowy całkowy operator Volterry następującym wzorem

$$(Kx)(t) = \int_0^t k(t,s)x(s)\,ds, \quad t \geqslant 0.$$

Jedna z najważniejszych własności tego operatora zawarta jest w poniższym lemacie [40, 58].

Lemat 5 ([H1, Lemma 2.5., H2, Lemma 2.4.]). *Jeżeli liniowy całkowy operator Volterry K przekształca przestrzeń L^1 w siebie, to jest ciągły.*

Zatem jeśli liniowy całkowy operator Volterry K przekształca przestrzeń L^1 w siebie, to możemy rozważać normę operatora K [24]. Normę tą będziemy oznaczać symbolem $||K||$.

Następnie wprowadzimy pojęcie miary słabej niezwartości, które jest jednym z głównych narzędzi używanych w pracach [H1] i [H2]. Załóżmy zatem, że E jest nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha z normą $||\cdot||$ oraz wektorem zerowym θ. Symbolem $B(x,r)$ będziemy oznaczać kulę o środku w punkcie x i promieniu r, w szczególności na oznaczenie kuli $B(\theta,r)$ będziemy pisać B_r. Następnie, przez $\mathfrak{M}_E$ oznaczmy rodzinę wszystkich niepustych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni E oraz przez $\mathfrak{N}_E^w$ jej podrodzinę złożoną ze wszystkich zbiorów, które są relatywnie słabo zwarte. Jeżeli $X \in \mathfrak{M}_E$, to symbol $\overline{X}^w$ oznacza słabe domknięcie zbioru X, zaś symbol Conv$X$ oznacza domkniętą (względem topologii normy) powłokę wypukłą zbioru X.
Przyjmujemy następującą definicję miary słabej niezwartości [14].

Definicja 6. Funkcję $\mu : \mathfrak{M}_\mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ nazywamy miarą słabej niezwartości, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

1° rodzina $\ker\mu = \{X \in \mathfrak{M}_E : \mu(X) = 0\}$ jest niepusta oraz $\ker\mu \subset \mathfrak{N}_E^w$,

2° $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leqslant \mu(Y)$,

3° $\mu(\mathrm{Conv}X) = \mu(X)$,

4° $\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqslant \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y)$ dla $\lambda \in [0,1]$,

5° jeżeli $X_n \in \mathfrak{M}_E,\ X_n = \overline{X}_n^w$ i $X_{n+1} \subset X_n$ dla $n = 1, 2, \dots$ oraz jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$, to iloczyn $X_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty X_n$ jest niepusty.

Rodzinę $\ker\mu$ opisaną w punkcie 1° powyższej definicji nazywamy jądrem miary słabej niezwartości μ. Ponieważ $X_\infty \subset X_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, więc $\mu(X_\infty) = 0$, co oznacza, że $X_\infty \in \ker\mu$.
W przestrzeni L^1 możemy skonstruować miarę słabej niezwartości w oparciu o następujące kryterium słabej niezwartości [22]:

Twierdzenie 7 ([H1, Theorem 3.1.]). *Ograniczony zbiór X jest relatywnie słabo zwarty w przestrzeni L^1 wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:*

(a) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeżeli $m(D) \leqslant \delta$, to $\int_D |x(t)|\,dt \leqslant \varepsilon$ dla wszystkich $x \in X$,

(b) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $T \geqslant 0$ takie, że $\int_T^\infty |x(t)|\,dt \leqslant \varepsilon$ dla dowolnego $x \in X$.

W oparciu o powyższe kryterium dla niepustego, ograniczonego podzbioru X przestrzeni L^1 definiujemy:

$$c(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big\{ \sup_{x \in X} \{ \sup\{ \int_D |x(t)| \, dt : \; D \subset \mathbb{R}_+, \; m(D) \leqslant \varepsilon \} \} \Big\},$$

$$d(X) = \lim_{T \to \infty} \{ \sup\{ \int_T^\infty |x(t)| \, dt : \; x \in X \}\},$$

oraz

$$\mu(X) = c(X) + d(X). \tag{1}$$

Można pokazać [9], że μ jest miarą słabej niezwartości w przestrzeni L^1.

W pracach [H1] i [H2] zajmujemy się pewnymi rodzajami nieliniowych równań całkowych typu Volterry, przy czym zakładamy, że funkcje występujące jawnie w równaniu lub spełniające pewne nierówności nałożone na funkcje z równania spełniają warunki Carathéodory'ego. W pracy [H1] rozważamy równanie następującej postaci

$$x(t) = p(t) + \int_0^t v(t, s, x(s)) \, ds, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

gdzie $p = p(t)$ i $v = v(t, s, x)$ są danymi funkcjami rzeczywistymi, zaś $x = x(t)$ jest nieznaną funkcją rzeczywistą. Przedstawimy teraz główny rezultat uzyskany dla tego równania. Załóżmy zatem, że spełnione są następujące warunki:

(i) $p \in L^1 = L^1(\mathbb{R}_+)$.

(ii) $v(t, s, x) = v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz funkcja $t \to v(t, s, x)$ jest mierzalna na $\mathbb{R}_+$ dla wszystkich $(t, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Ponadto, funkcja $(s, x) \to v(t, s, x)$ jest ciągła na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$.

(iii) $|v(t, s, x)| \leqslant k(t, s)(a(s) + b|x|)$ dla $(t, s, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, gdzie b jest nieujemną stałą, $a \in L^1$ i $a(s) \geqslant 0$ dla prawie wszystkich $s \in \mathbb{R}_+$. Ponadto zakładamy, że funkcja $k(t, s) = k : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełnia warunki Carathéodory'ego oraz liniowy całkowy operator Volterry K generowany przez funkcję $k(t, s)$

$$(Kx)(t) = \int_0^t k(t, s) x(s) \, ds \quad (t \geqslant 0)$$

odwzorowuje przestrzeń L^1 w siebie.

(iv) $b\|K\| < 1$, gdzie $\|K\|$ oznacza normę operatora K.

Główny wynik pracy [H1] opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 8 ([H1, Theorem 4.1.]). *Załóżmy, że spełnione są założenia (i) - (iv). Wtedy równanie* (2) *ma co najmniej jedno rozwiązanie $x \in L^1$.*

Dowód powyższego twierdzenia opiera się na zastosowaniu klasycznego twierdzenia Schaudera o punkcie stałym, które mówi, że każde ciągłe przekształcenie niepustego, wypukłego i zwartego podzbioru przestrzeni Banacha w siebie ma punkt stały. Zatem w dowodzie wprowadzamy operator F działający z przestrzeni L^1 w siebie, następnie dobieramy promień r

kuli B_r tak, aby operator F przekształcał kulę B_r w siebie oraz wykazujemy, że operator F spełnia warunek kontrakcji ze względu na miarę niezwartości μ zdefiniowaną wzorem (1), czyli warunek:

$$\mu(FX) \leqslant q\,\mu(X), \quad \text{gdzie } q < 1 \tag{3}$$

dla dowolnego niepustego podzbioru X kuli B_r. Następnie konstruujemy ciąg zbiorów $\{B_r^n\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie

$$B_r^1 = \text{Conv}FB_r,\ B_r^2 = \text{Conv}FB_r^1, \quad \text{itd.}$$

Na podstawie nierówności (3) ciąg zbiorów $\{B_r^n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia założenia aksjomatu 5° Definicji 6, zatem zbiór $Y = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_r^n$ jest niepusty. Ponadto, zbiór Y jest domknięty, wypukły i słabo zwarty (jako element rodziny kerμ). Następnie definiujemy zbiory

$$Y_1 = \text{Conv}FY,$$

$$Y_2 = \text{Conv}FY_1.$$

Pokażemy, że zbiór Y_2 spełnia założenia twierdzenia Schaudera, czyli jest niepusty, wypukły i zwarty oraz F przekształca Y_2 w siebie w sposób ciągły. Mamy $Y_2 \subset Y_1 \subset Y$, zatem Y_2 jest słabo zwarty, jest też oczywiście niepusty, domknięty i wypukły. Zatem pozostała do wykazania zwartość zbioru Y_2 w sensie topologii normy oraz fakt, że F przekształca Y_2 w siebie i jest ciągły. Wykazanie zwartości zbioru Y_2 jest najtrudniejszą i najbardziej "subtelną" częścią dowodu. Dla pokazania zwartości zbioru Y_2 dzielimy Y_2 na dwa zbiory $Y_2^T = \{y|_{[0,T]} : y \in Y_2\}$ oraz $Y_2^{\infty} = \{y|_{[T,\infty]} : y \in Y_2\}$. Zwartość zbioru Y_2^{∞} wynika od razu z punktu (b) Twierdzenia 7, zatem pozostaje dowieść zwartości zbioru Y_2^T. Na podstawie Twierdzenia 1 wystarczy pokazać, że Y_2^T jest słabo zwarty i zwarty według miary. Słaba zwartość zbioru Y_2^T wynika od razu ze słabej zwartości zbioru Y_2, natomiast dla wykazania zwartości według miary stosujemy Twierdzenie 2. Dowód Twierdzenia 8 kończy pokazanie, że operator F odwzorowuje zbiór Y_2^T w siebie w sposób ciągły, co implikuje, że F w sposób ciągły przekształca zbiór Y_2 w siebie. Zatem spełnione są wszystkie założenia twierdzenia Schaudera o punkcie stałym, więc na podstawie tego twierdzenia wnioskujemy, że operator F ma co najmniej jeden punkt stały w zbiorze Y_2. Oznacza to, że równanie (2) ma co najmniej jedno rozwiązanie w przestrzeni L^1.

W pracy [H2] zajmujemy się równaniem funkcyjno-całkowym typu

$$x(t) = f_1\Big(t, \int_0^t k(t,s) f_2(s, x(s))\, ds\Big), \quad t \geqslant 0. \tag{4}$$

Równanie to uogólnia kilka typów równań całkowych, liniowych jak i nieliniowych, rozważanych w wielu wcześniejszych pracach, jednak równanie (4) nie jest uogólnieniem równania (2) rozważanego w pracy [H1], podobnie - równanie (2) nie jest uogólnieniem równania (4). Zakładamy, że równanie (4) spełnia następujące warunki:

(i) Funkcje $f_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają warunki Carathéodory'ego oraz istnieją funkcje $a_i \in L^1$ i stałe $b_1 > 0$ takie, że

$$|f_i(t,x)| \leqslant a_i(t) + b_i|x|$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ i dla $x \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$.

(ii) Funkcja $k(t,s) = k : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ spełnia warunki Carathéodory'ego oraz liniowy całkowy operator Volterry K generowany przez funkcję k

$$(Kx)(t) = \int_0^t k(t,s)x(s)ds$$

przekształca przestrzeń L_1 w siebie.

(iii) $b_1 b_2 \|K\| < 1$.

Główny wynik pracy [H2] jest zawarty w twierdzeniu:

Twierdzenie 9 ([H2, Theorem 4.1.]). *Załóżmy, że spełnione są założenia (i) - (iii). Wtedy równanie* (4) *ma co najmniej jedno rozwiązanie* $x \in L^1$.

Dowód powyższego twierdzenia, podobnie jak dowód Twierdzenia 8, opiera się na połączeniu dwóch narzędzi - miary słabej niezwartości oraz twierdzenia Schaudera. Odmienny jest jednak sposób pokazania zwartości w topologii normy zbioru Y_0 z twierdzenia Schaudera. W dowodzie Twierdzenia 9, aby wykazać relatywną zwartość zbioru Y_0, wykazujemy relatywną ciągową zwartość tego zbioru, gdyż dla przestrzeni metrycznych (i ogólnie - dla przestrzeni metryzowalnych) pojęcia te są równoważne. Warunki Carathéodory'ego nałożone na funkcje f_1, f_2 i k w założeniach (i) oraz (ii) ingerują właśnie w tym fragmencie dowodu. Natomiast założenia (iii) potrzebujemy do wykazania niepustości zbioru Y_0.

4.3. Miary niezwartości w przestrzeni funkcji określonych na $\mathbb{R}_+$ o wartościach w przestrzeni Banacha z miarą niezwartości Hausdorffa ([H3])

W pracach [H1] i [H2] badaliśmy rozwiązalność w przestrzeni Lebesgue'a pewnych typów nieliniowych równań całkowych określonych na $\mathbb{R}_+$, wykorzystując pojęcie miary słabej niezwartości w przestrzeni $L^1(\mathbb{R}_+)$ oraz klasyczne twierdzenie Schaudera o punkcie stałym. Prace [H3] - [H7] dotyczą rozwiązalności nieskończonych układów nieliniowych równań całkowych typu Volterry-Hammersteina, określonych na $\mathbb{R}_+$. Rozwiązań takich układów równań całkowych szukamy w przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+, E)$ ciągłych funkcji ograniczonych na $\mathbb{R}_+$ o wartościach leżących w klasycznej ciągowej przestrzeni E. Głównymi narzędziami użytymi do wykazania istnienia rozwiązań w wymienionych przestrzeniach funkcyjnych są miary niezwartości w tych przestrzeniach oraz twierdzenie typu Darbo o punkcie stałym. Dlatego najpierw konstruujemy miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$. W pierwszej kolejności konstrukcję taką przeprowadzamy w szczególnym przypadku, gdy w przestrzeni E zadana jest miara niezwartości Hausdorffa (patrz [H3]). Podyktowane jest to faktem, że w niektórych ciągowych przestrzeniach Banacha znane są dokładne matematyczne formuły wyrażające miarę niezwartości Hausdorffa, zaś znajomość takiej formuły pozwoli uzyskać formułę na miarę niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$. Jest to niezwykle istotne, gdyż użycie miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ w naszych dowodach twierdzeń egzystencjalnych wymaga, aby miara ta była przedstawiona pewnym wzorem matematycznym, czyli wspomnianą formułą.

W pracy [H3] przedstawiamy między innymi konstrukcję miar niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ w przypadku, gdy w przestrzeni E zadana jest miara niezwartości Hausdorffa. Aby opisać tą konstrukcję, wprowadźmy niezbędne pojęcia. Załóżmy zatem, że E jest przestrzenią Banacha z normą $||\cdot||_E$ oraz wektorem zerowym θ. Kulę domknietą w E o środku w punkcie x i promieniu r oznaczamy symbolem $B(x,r)$, zaś w szczególnym przypadku na oznaczenie kuli $B(\theta, r)$ piszemy B_r. Jeżeli X, Y są podzbiorami przestrzeni Banacha E, to symbole $X+Y$, λX ($\lambda \in \mathbb{R}$) oznaczają działania algebraiczne na podzbiorach przestrzeni E. Dalej, dla podzbioru X przestrzeni E symbol $\overline{X}$ oznacza domknięcie zbioru X, zaś symbol Conv$X$ oznacza domkniętą powłokę wypukłą zbioru X. Ponadto, jeśli założymy, że X jest niepustym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni E, to średnicę zbioru X bedziemy oznaczać przez diam$X$. Symbol $||X||_E$ oznacza normę zbioru X, tzn. $||X||_E = \sup\{||x||_E : x \in X\}$. Następnie, przez $\mathfrak{M}_E$ oznaczmy rodzinę wszystkich niepustych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni E oraz przez $\mathfrak{N}_E$ jej podrodzinę złożoną ze wszystkich zbiorów, które są relatywnie zwarte. Przyjmujemy następującą definicję miary niezwartości [8].

Definicja 10. Funkcję $\mu : \mathfrak{M}_E \to \mathbb{R}_+$ nazywamy miarą niezwartości w E, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

(i) rodzina $\ker\mu = \{X \in \mathfrak{M}_E : \mu(X) = 0\}$ jest niepusta oraz $\ker\mu \subset \mathfrak{N}_E$,

(ii) $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leqslant \mu(Y)$,

(iii) $\mu(\overline{X}) = \mu(X)$,

(iv) $\mu(\mathrm{Conv}X) = \mu(X)$,

(v) $\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqslant \lambda\,\mu(X) + (1-\lambda)\,\mu(Y)$ dla $\lambda \in [0,1]$,

(vi) jeżeli (X_n) jest ciągiem zbiorów domkniętych z $\mathfrak{M}_E$ takich, że $X_{n+1} \subset X_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ i jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$ to zbiór $X_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ jest niepusty.

Jedną z najważniejszych miar niezwartości jest miara niezwartości Hausdorffa zdefiniowana następująco [26, 27]:

$$\chi(X) = \inf\{\varepsilon > 0 : X \text{ ma skończoną } \varepsilon - \text{sieć w } E\}.$$

Można pokazać, że miara niezwartości Hausdorffa jest regularna, tzn. jest podliniowa:

$$\mu(X+Y) \leqslant \mu(X) + \mu(Y),$$

$$\mu(\lambda X) = |\lambda|\,\mu(X) \text{ dla } \lambda \in \mathbb{R},$$

jest pełna:

$$\ker\mu = \mathfrak{N}_E$$

oraz ma własność maksimum:

$$\mu(X \cup Y) = \max\{\mu(X), \mu(Y)\}.$$

Okazuje się także, że miara niezwartości Hausdorffa jest dość wygodna w zastosowaniach, gdyż w pewnych klasycznych przestrzeniach Banacha znane są formuły wyrażające miarę Hausdorffa w powiązaniu ze strukturą tych przestrzeni. I tak, w przestrzeniach Banacha c_0, l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ i $C([a,b])$ znamy formuły, które wyrażają miarę niezwartości Hausdorffa χ, natomiast w przestrzeniach c i $L^p([a,b])$ możemy podać formuły na regularne miary niezwartości równoważne mierze Hausdorffa χ, co również jest wygodną sytuacją [8, 13]. Zapiszemy teraz znane formuły na miarę niezwartości Hausdorffa w przestrzeniach c_0, l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ i $C([a,b])$. Przypomnijmy, że przestrzeń c_0 składa się z ciągów rzeczywistych $x = (x_n)$, które są zbieżne do zera, zaś norma w tej przestrzeni jest zadana wzorem

$$||x||_{c_0} = ||(x_n)||_{c_0} = \sup\{|x_n| : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Dla dowolnego $X \in \mathfrak{M}_{c_0}$ mamy następującą formułę wyrażającą miarę niezwartości Hausdorffa w przestrzeni c_0 [13]:

$$\chi(X) = \lim_{n\to\infty} \Big\{ \sup_{x=(x_i)\in X} \{ \sup \{|x_k| : k \geqslant n\}\}\Big\}.$$

Ustalmy teraz dowolnie $p \in [1, \infty)$ i rozważmy przestrzeń l_p złożoną ze wszystkich ciągów rzeczywistych (x_n) spełniających warunek $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ unormowaną przez

$$||x||_{l_p} = ||(x_n)||_{l_p} = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}.$$

W przestrzeni l_p mamy następującą formułę wyrażającą miarę niezwartości Hausdorffa:

$$\chi(X) = \lim_{k\to\infty} \Big\{ \sup \{(\sum_{n=k}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p} : (x_n) \in X\}\Big\}.$$

Można również pokazać, że w klasycznej przestrzeni funkcyjnej $C = C([a, b])$ funkcji rzeczywistych ciągłych na przedziale $[a, b]$ z normą maximum, miara niezwartości Hausdorffa dowolnego zbioru $X \in \mathfrak{M}_C$ może być wyrażona formułą:

$$\chi(X) = \frac{1}{2}\omega_0(X),$$

gdzie $\omega_0(X)$ oznacza "wartość graniczną" modułu ciągłości zbioru X [8].

Ważnym narzędziem w naszych rozważaniach jest twierdzenie o punkcie stałym dla operatorów ciagłych spełniających warunek kontrakcji ze względu na miarę niezwartości. Używane przez nas twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia Darbo wykorzystującego miarę niezwartości Kuratowskiego. Ogólna wersja tego twierdzenia jest sformułowana dla dowolnej miary niezwartości [8].

Twierdzenie 11 (Twierdzenie o punkcie stałym typu Darbo)**.** *Niech μ będzie dowolną miarą niezwartości w przestrzeni Banacha E. Załóżmy, że Ω jest niepustym, ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni E oraz $Q : \Omega \to \Omega$ jest operatorem ciągłym takim, że istnieje stała $k \in [0, 1)$ dla której $\mu(QX) \leqslant k\mu(X)$ dla dowolnego niepustego podzbioru X zbioru Ω. Wtedy operator Q ma co najmniej jeden punkt stały w zbiorze Ω.*

Skonstruujemy teraz trzy funkcje γ_a, γ_b oraz γ_c określone na rodzinie $\mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$, które w szczególnym przypadku okażą się miarami niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$. W tym celu załóżmy, że przestrzeń E jest nieskończonego wymiaru z normą $|| \cdot ||_E$ i formalnie zdefiniujmy przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+, E)$ w następujący sposób:

$$BC(\mathbb{R}_+, E) = \{x : \mathbb{R}_+ \to E, x \text{ jest ciągła i ograniczona na } \mathbb{R}_+\}.$$

W przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ zadajemy normę supremum

$$||x||_\infty = \sup\{||x(t)||_E : t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+, E)$ z tak określoną normą jest przestrzenią Banacha. Ponadto, dla ustalonego $T > 0$ zdefiniujmy przestrzeń

$$C_T = C([0, T], E) = \{x : [0, T] \to E, x \text{ jest ciągła na } [0, T]\},$$

w której również wprowadzamy normę supremum oznaczoną symbolem $||\cdot||_T$ i określoną wzorem
$$||x||_T = \sup\{||x(t)||_E : t \in [0,T]\}.$$
Łatwo zauważyć, że obcięcie dowolnej funkcji $x \in BC(\mathbb{R}_+, E)$ do zbioru $[0,T]$, czyli funkcja $x|_{[0,T]}$ jest elementem przestrzeni C_T.
Dalej, ustalmy zbiór $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$. Weźmy $T > 0$ i $\varepsilon > 0$. Dla dowolnej funkcji $x \in X$ definiujemy moduł ciągłości $\omega^T(x,\varepsilon)$ funkcji x na przedziale $[0,T]$ wzorem
$$\omega^T(x,\varepsilon) = \sup\{||x(t) - x(s)||_E : t, s \in [0,T],\ |t-s| \leqslant \varepsilon\}.$$
Następnie zdefiniujmy
$$\omega^T(X,\varepsilon) = \sup\{\omega^T(x,\varepsilon) : x \in X\},$$
$$\omega_0^T(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega^T(X,\varepsilon).$$
Powyższa granica istnieje i jest skończona, gdyż funkcja $\varepsilon \to \omega^T(X,\varepsilon)$ jest niemalejąca i nieujemna dla $\varepsilon > 0$. Następnie kładziemy
$$\omega_0(X) = \lim_{T \to \infty} \omega_0^T(X). \tag{5}$$
Istnienie powyższej granicy wynika z faktu, że funkcja $T \to \omega_0^T(X)$ jest niemalejąca oraz nierówność
$$\omega^T(X,\varepsilon) \leqslant 2||X||_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$$
zachodzi dla każdego $\varepsilon > 0$ i $T > 0$. Stąd mamy: $\omega_0(X) \leqslant 2||X||_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$.
Następnie załóżmy, że $\gamma = \gamma(X)$ jest zadaną miarą niezwartości w przestrzeni Banacha E. Dla dowolnie ustalonej liczby $t \in \mathbb{R}_+$ oznaczmy symbolem $X(t)$ przecięcie zbioru X w punkcie t, czyli zbiór $X(t) = \{x(t) : x \in X\}$. Oczywiście $X(t)$ jest podzbiorem przestrzeni E.
Następnie połóżmy
$$\overline{\gamma}_T(X) = \sup\{\gamma(X(t)) : t \in [0,T]\}$$
dla ustalonego $T > 0$. Funkcja $T \to \overline{\gamma}_T(X)$ jest niemalejąca i ograniczona z góry, zatem możemy zdefiniować wielkość
$$\overline{\gamma}_\infty(X) = \lim_{T \to \infty} \overline{\gamma}_T(X). \tag{6}$$
Następnie, dla ustalonego $T > 0$ połóżmy
$$a_T(X) = \sup_{x \in X} \{\, \sup\{||x(t)||_E : t \geqslant T\}\}.$$
Funkcja $T \to a_T(X)$ jest nierosnąca, więc istnieje skończona granica
$$a_\infty(X) = \lim_{T \to \infty} a_T(X). \tag{7}$$
Zdefiniujemy jeszcze dwie wielkości, które podobnie jak $a_\infty(X)$ badają zachowanie funkcji ze zbioru X w nieskończoności. W tym celu dla ustalonego $T > 0$ określmy funkcję $b_T = b_T(X)$ wzorem
$$b_T(X) = \sup_{x \in X} \{\, \sup\{||x(t) - x(s)||_E : t, s \geqslant T\}\}.$$
Funkcja $T \to b_T(X)$ jest nierosnąca na $\mathbb{R}_+$, więc istnieje skończona granica
$$b_\infty(X) = \lim_{T \to \infty} b_T(X). \tag{8}$$

W końcu, dla ustalonego $t \in \mathbb{R}_+$ kładziemy

$$\operatorname{diam} X(t) = \sup\{||x(t) - y(t)||_E : x, y \in X\}$$

i definiujemy

$$c(X) = \limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam} X(t). \tag{9}$$

Teraz możemy rozważyć funkcje γ_a, γ_b, γ_c określone na rodzinie $\mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$ w następujący sposób:

$$\gamma_a(X) = \omega_0(X) + \overline{\gamma}_\infty(X) + a_\infty(X), \tag{10}$$

$$\gamma_b(X) = \omega_0(X) + \overline{\gamma}_\infty(X) + b_\infty(X), \tag{11}$$

$$\gamma_c(X) = \omega_0(X) + \overline{\gamma}_\infty(X) + c(X), \tag{12}$$

gdzie składowe są określone równaniami odpowiednio (5), (6), (7), (8), (9). W poniższym twierdzeniu sformułujemy warunek, przy którym wymienione wyżej funkcje są miarami niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$.

Twierdzenie 12 ([H3, Theorem 3.2.]). *Załózmy, że γ jest miarą niezwartości Hausdorffa w przestrzeni Banacha E, czyli $\gamma = \chi_E$. Wtedy funkcje χ_a, χ_b i χ_c zdefiniowane równościami* (10) - (12) *są miarami niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ takimi, że*

$$\chi(X) \leqslant 2\,\chi_b(X),$$

$$\chi(X) \leqslant 4\,\chi_c(X),$$

$$\chi_b(X) \leqslant 2\,\chi_a(X), \quad \chi_c(X) \leqslant 2\,\chi_a(X)$$

dla dowolnego zbioru $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$, gdzie χ oznacza miarę niezwartości Hausdorffa w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$.

Twierdzenie 12 pozostaje prawdziwe, jeżeli w konstrukcji składnika $\overline{\gamma}_\infty$ zdefiniowanego przez (6) zastąpimy miarę niezwartości Hausdorffa χ dowolną regularną miarą niezwartości μ, która jest równoważna mierze χ.

Zapiszemy jeszcze własności miar niezwartości zdefiniowanych wzorami (10) - (12). Miary χ_a i χ_b są podliniowe oraz mają własność maximum. Z drugiej strony miara χ_c jest podliniowa, ale nie ma własności maximum. Łatwo możemy pokazać, że miary niezwartości χ_a, χ_b i χ_c nie są pełne, gdyż można skonstruować przykłady pokazujące prawdziwość poniższych inkluzji [12]:

$$\ker\chi_a \subsetneq \mathfrak{N}_{BC(\mathbb{R}_+,E)},$$

$$\ker\chi_b \subsetneq \mathfrak{N}_{BC(\mathbb{R}_+,E)},$$

$$\ker\chi_c \subsetneq \mathfrak{N}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}.$$

Opiszemy teraz jądra skonstruowanych wyżej miar niezwartości χ_a, χ_b i χ_c, gdyż w dalszym ciągu będziemy korzystać z tych opisów. Jądro $\ker\chi_a$ miary niezwartości χ_a składa się ze wszystkich niepustych, ograniczonych podzbiorów X przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ takich, że funkcje ze zbioru X są lokalnie równociągłe na $\mathbb{R}_+$ i dążą do zera w nieskończoności w tym samym tempie, tzn.

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{T>0} \ \forall_{x\in X} \ \forall_{t\geqslant T} \ ||x(t)||_E \leqslant \varepsilon.$$

Ponadto, wszystkie przecięcia $X(t)$ zbioru X są relatywnie zwarte w E.
Jądro $\ker\chi_b$ miary χ_b składa się ze wszystkich niepustych i ograniczonych podzbiorów X przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ takich, że funkcje z X są lokalnie równociągłe na $\mathbb{R}_+$ oraz dążą do

granic jednostajnie względem zbioru X. Ponadto, wszystkie przecięcia $X(t)$ zbioru X są relatywnie zwarte w przestrzeni E.
Podobnie, jądro kerχ_c miary niezwartości χ_c składa się ze wszystkich niepustych i ograniczonych zbiorów X zawartych w $BC(\mathbb{R}_+, E)$ takich, że funkcje z X są lokalnie równociągłe na $\mathbb{R}_+$, zaś przecięcia $X(t)$ zbioru X są relatywnie zwarte w E dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$. Ponadto, grubość wiązki utworzonej przez wykresy funkcji ze zbioru X dąży do zera w nieskończoności.

Opiszemy teraz szczególne przypadki miar niezwartości χ_a, χ_b i χ_c dla pewnych ciągowych przestrzeni Banacha E, mianowicie dla przestrzeni $E = c_0$ oraz dla przestrzeni $E = l_1$. Dokładniej mówiąc, opiszemy miary niezwartości χ_a, χ_b i χ_c w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, c_0)$ wszystkich ciągłych i ograniczonych funkcji $x : \mathbb{R}_+ \to c_0$ oraz w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_1)$ wszystkich ciągłych i ograniczonych funkcji $x : \mathbb{R}_+ \to l_1$. Zauważmy, że każdy element przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, c_0)$ może być rozpatrywany w dwojaki sposób: jako funkcja określona na $\mathbb{R}_+$ o wartościach w przestrzeni c_0, ale z drugiej strony jako ciąg funkcyjny $x(t) = (x_n(t)) = (x_1(t), x_2(t), \ldots)$, gdzie $x_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jest funkcją, której wartości tworzą n-te wyrazy ciągów rzeczywistych z c_0 odpowiadających argumentom $t \in \mathbb{R}_+$. W analogiczny sposób możemy rozpatrywać elementy przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_1)$. To drugi powód, dla którego przestrzenie c_0 i l_1, jak i inne ciągowe przestrzenie Banacha wydają się być odpowiednie do przeprowadzenia naszych rozważań.
Przedstawimy teraz dokładne formuły na składowe miar $\chi_a(X)$, $\chi_b(X)$ i $\chi_c(X)$ dla $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,c_0)}$ otrzymane w [H3]. Mamy:

$$\omega_0(X) = \lim_{T\to\infty} \left\{ \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \sup_{x\in X} \{ \sup_{t,s\in[0,T],|t-s|\leqslant\varepsilon} \{\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n(t) - x_n(s)|\}\} \right\} \right\},$$

$$\overline{\chi}_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} \left\{ \sup_{t\in[0,T]} \left\{ \lim_{n\to\infty} \{ \sup_{x=(x_k)\in X} \{\sup_{k\geqslant n} |x_k(t)|\}\} \right\} \right\},$$

$$a_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} \left\{ \sup_{x=(x_n)\in X} \{ \sup_{t\geqslant T} \{\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n(t)|\}\} \right\},$$

$$b_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} \left\{ \sup_{x=(x_n)\in X} \{ \sup_{t,s\geqslant T} \{\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n(t) - x_n(s)|\}\} \right\},$$

$$c(X) = \limsup_{t\to\infty} \left\{ \sup_{x=(x_n),y=(y_n)\in X} \{\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n(t) - y_n(t)|\} \right\}.$$

Natomiast w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_1)$ otrzymaliśmy następujące formuły wyrażające składowe miar niezwartości $\chi_a(X)$, $\chi_b(X)$ i $\chi_c(X)$ dla $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,l_1)}$ ([H4]):

$$\omega_0(X) = \lim_{T\to\infty} \left\{ \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \sup_{x=(x_n)\in X} \{ \sup_{t,s\in[0,T],\,|t-s|\leqslant\varepsilon} \{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t) - x_n(s)|\}\} \right\} \right\},$$

$$\overline{\chi}_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} \left\{ \sup_{t\in[0,T]} \left\{ \lim_{n\to\infty} \{ \sup_{x=(x_k)\in X} \{\sum_{k=n}^{\infty} |x_k(t)|\}\} \right\} \right\},$$

$$a_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} \left\{ \sup_{x=(x_n)\in X} \{ \sup_{t\geqslant T} \{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t)|\}\} \right\},$$

$$b_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} \left\{ \sup_{x=(x_n)\in X} \{ \sup_{t,s\geqslant T} \{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t) - x_n(s)|\}\} \right\},$$

$$c(X) = \limsup_{t\to\infty} \{ \sup_{x=(x_n),y=(y_n)\in X} \{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t) - x_n(s)|\}\}.$$

4.4. Istnienie rozwiązań nieskończonego układu nieliniowych równań całkowych w przestrzeni funkcji określonych na $\mathbb{R}_+$ o wartościach w ciągowej przestrzeni Banacha z miarą niezwartości Hausdorffa ([H3, H4, H6])

Rezultaty uzyskane w podrozdziale 4.3. wykorzystamy teraz do wykazania trzech twierdzeń egzystencjalnych. Dwa pierwsze z tych twierdzeń dotyczą rozwiązalności nieskończonego układu nieliniowych kwadratowych równań całkowych typu Volterry-Hammersteina następującej postaci:

$$x_n(t) = a_n(t) + f_n(t, x_n(t), x_{n+1}(t), \ldots) \int_0^t k_n(t,s) g_n(s, x_1(s), x_2(s), \ldots) ds \qquad (13)$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ i dla $n = 1, 2, \ldots$.
Pierwsze twierdzenie mówi o rozwiązalności układu równań (13) w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, c_0)$.
Załóżmy, że spełnione są warunki:

(i) Ciąg $(a_n(t))$ jest elementem przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, c_0)$ oraz $\lim\limits_{t\to\infty} a_n(t) = 0$ jednostajnie względem $n \in \mathbb{N}$, czyli spełniony jest następujący warunek:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{T>0}{\exists}\ \underset{t\geqslant T}{\forall}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ |a_n(t)| \leqslant \varepsilon.$$

(ii) Funkcje $k_n(t,s) = k_n : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ sa ciągłe na $\mathbb{R}_+^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ponadto funkcje $t \to k_n(t,s)$ są lokalnie równociągłe na $\mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $s \in \mathbb{R}_+$, to znaczy

$$\underset{T>0}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{s\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \underset{t_1,t_2\in[0,T]}{\forall}\ [\,|t_2 - t_1| \leqslant \delta \Rightarrow |k_n(t_2,s) - k_n(t_1,s)| \leqslant \varepsilon].$$

(iii) Istnieje stała $K_1 > 0$ taka, że

$$\int_0^t |k_n(t,s)| ds \leqslant K_1$$

dla dowolnych $t \in \mathbb{R}_+$ i $n = 1, 2, \ldots$.

(iv) Ciąg $(k_n(t,s))$ jest równoograniczony na $\mathbb{R}_+^2$, to znaczy istnieje stała $K_2 > 0$ taka, że $|k_n(t,s)| \leqslant K_2$ dla $t, s \in \mathbb{R}_+$ i $n = 1, 2, \ldots$.

(v) Funkcja f_n jest określona na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ i przyjmuje wartości rzeczywiste dla $n = 1, 2, \ldots$. Ponadto, funkcja $t \to f_n(t, x_n, x_{n+1}, \ldots)$ jest ciągła na $\mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $x = (x_n) \in c_0$ i jednostajnie względem $n \in \mathbb{N}$, to znaczy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{t_0\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{(x_i)\in c_0}{\forall}\ \underset{t\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ [\,|t - t_0| \leqslant \delta \Rightarrow$$
$$|f_n(t, x_n, x_{n+1}, \ldots) - f_n(t_0, x_n, x_{n+1}, \ldots)| \leqslant \varepsilon].$$

(vi) Istnieje niemalejąca funkcja $l : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, ciągła w 0 i taka, że

$$|f_n(t, x_n, x_{n+1}, \ldots) - f_n(t, y_n, y_{n+1}, \ldots)| \leqslant l(r) \sup\{|x_i - y_i| : i \geqslant n\}$$

dla wszystkich $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in c_0$ takich, że $||x||_{c_0} \leqslant r$, $||y||_{c_0} \leqslant r$ i dla dowolnego $n = 1, 2, \ldots$.

(vii) Ciag funkcyjny $(\overline{f}_n)$, gdzie $\overline{f}_n(t) = |f_n(t, 0, 0, \ldots)|$ jest elementem przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, c_0)$ i spełnia warunek $\lim_{t\to\infty} \overline{f}_n(t) = 0$ jednostajnie względem $n \in \mathbb{N}$.

Na podstawie założenia (vii) możemy zdefiniować stałą

$$\overline{F} = \sup\{\overline{f}_n(t) : t \in \mathbb{R}_+, n = 1, 2, \ldots\}.$$

Dodatkowo nakładamy następujace założenia na funkcję g:

(viii) Funkcja g_n jest określona na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ i przyjmuje wartości rzeczywiste dla $n = 1, 2, \ldots$. Ponadto operator g określony na przestrzeni $\mathbb{R}_+ \times c_0$ wzorem

$$(gx)(t) = (g_n(t, x)) = (g_1(t, x), g_2(t, x), \ldots)$$

przekształca $\mathbb{R}_+ \times c_0$ w c_0 oraz jest taki, że rodzina funkcji $\{(gx)(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest równociągła w każdym punkcie przestrzeni c_0, to znaczy dla każdego dowolnie ustalonego $x \in c_0$ i dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$||(gy)(t) - (gx)(t)||_{c_0} \leqslant \varepsilon$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ i dla każdego $y \in c_0$ takiego, że $||y - x||_{c_0} \leqslant \delta$.

(ix) Operator g zdefiniowany w założeniu (viii) jest ograniczony na przestrzeni $\mathbb{R}_+ \times c_0$. Dokładniej, istnieje dodatnia stała $\overline{G}$ taka, że $||(gx)(t)||_{c_0} \leqslant \overline{G}$ dla dowolnego $x \in c_0$ i dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

(x) Istnieje dodatnie rozwiązanie r_0 nierówności

$$A + \overline{F}\,\overline{G}\,K_1 + \overline{G}\,K_1 r\, l(r) \leqslant r$$

takie, że $\overline{G}\,K_1\, l(r_0) < 1$, gdzie stałe $\overline{F}$, $\overline{G}$, K_1 są zdefiniowane wyżej, zaś stała A jest zdefiniowana następująco

$$A = \sup\{|a_n(t)| : t \in \mathbb{R}_+,\ n = 1, 2, \ldots\}.$$

Twierdzenie 13 ([H3, Theorem 4.4.]). *Załóżmy, że spełnione są warunki (i)-(x). Wtedy nieskończony układ równań całkowych* (13) *ma co najmniej jedno rozwiązanie w przestrzeni funkcyjnej* $BC(\mathbb{R}_+, c_0)$.

W celu udowodnienia powyższego twierdzenia stosujemy Twierdzenie 11. Najpierw definiujemy operator całkowy Q określony na przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, c_0)$ i korzystając z założeń (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (vii) i (ix) oraz z faktu, że przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+, c_0)$ jest nie tylko przestrzenią Banacha, ale jest też algebrą Banacha pokazujemy, że operator Q przekształca przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+, c_0)$ w siebie. Następnie, wykorzystując otrzymane wcześniej oszacowania oraz założenie (x) wnioskujemy, że istnieje $r_0 > 0$ takie, że operator Q przeprowadza kulę B_{r_0} w siebie. Kula ta jest zbiorem Ω z Twierdzenia 11. Jako kula domknięta jest to niepusty, ograniczony wypukły zbiór domknięty. Następnie wykazujemy, że operator Q jest ciągły na kuli B_{r_0} (z założenia (viii)). Wreszcie pokazujemy, że dla miary niezwartości $\chi_a(X) = \omega_0(X) + \overline{\chi}_\infty(X) + a_\infty(X)$ zadanej wzorem (10) spełniona jest nierówność kontrakcyjna z założeń Twierdzenia 11, zatem dla zbioru $\Omega = B_{r_0}$ spełnione są wszystkie założenia Twierdzenia 11. Wnioskujemy więc, że operator Q ma punkt stały w kuli B_{r_0}. Zatem układ równań całkowych (13) ma choć jedno rozwiązanie $x(t) = (x_n(t))$ w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, c_0)$. Oczywiście $x \in B_{r_0}$.

Drugie ze wspomnianych na początku podrozdziału twierdzeń egzystencjalnych dotyczy również rozwiązalności nieskończonego układu równań całkowych (13), ale w tym przypadku rozwiązań szukamy w przestrzeni l_1. Ponieważ $l_1 \subset c_0$, więc takie rozważania są uzasadnione (praca [H4] powstała rok po pracy [H3]). Podobnie jak poprzednio, najpierw sformułujemy wszystkie założenia twierdzenia.

(i) Ciąg $(a_n(t))$ jest elementem przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_1)$ oraz $\lim\limits_{t\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) = 0$.

(ii) Funkcje $k_n(t,s) = k_n : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ są ciągłe na $\mathbb{R}_+^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ponadto funkcje $t \to k_n(t,s)$ są lokalnie równociągłe na $\mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $s \in \mathbb{R}_+$, to znaczy

$$\underset{T>0}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{s\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \underset{t_1,t_2\in[0,T]}{\forall}\ \left[\, |t_2 - t_1| \leqslant \delta \Rightarrow |k_n(t_2,s) - k_n(t_1,s)| \leqslant \varepsilon \right].$$

(iii) Istnieje stała $K_1 > 0$ taka, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t |k_n(t,s)|ds \leqslant K_1$$

dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$.

(iv) Ciąg $(k_n(t,s))$ jest równoograniczony na $\mathbb{R}_+^2$, to znaczy istnieje stała $K_2 > 0$ taka, że $|k_n(t,s)| \leqslant K_2$ for $t, s \in \mathbb{R}_+$ i $n = 1, 2, \ldots$.

(v) Ciąg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest określony na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ i przyjmuje wartości rzeczywiste. Ponadto funkcja $t \to \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t, x_n, x_{n+1}, \ldots)$ jest ciągła na $\mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $x = (x_n) \in l_1$, to znaczy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{t_0\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{(x_i)\in l_1}{\forall}\ \underset{t\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \Big[\, |t - t_0| \leqslant \delta \Rightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t, x_n, x_{n+1}, \ldots) - f_n(t_0, x_n, x_{n+1}, \ldots)| \leqslant \varepsilon \Big].$$

(vi) Istnieje niemalejaca funkcja $l : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, ciągła w 0 i taka, że

$$|f_n(t, x_n, x_{n+1}, \ldots) - f_n(t, y_n, y_{n+1}, \ldots)| \leqslant l(r)\, |x_n - y_n|$$

dla wszystkich $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in l_1$ takich, że $||x||_{l_1} \leqslant r$, $||y||_{l_1} \leqslant r$, dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$ i dla $n = 1, 2, \ldots$.

(vii) Ciag funkcyjny $(\overline{f}_n)$, gdzie $\overline{f}_n(t) = |f_n(t, 0, 0, \ldots)|$ jest elementem przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_1)$ oraz $\lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{f}_n(t) = 0$.

Na podstawie założenia (vii) możemy zdefiniować stałą $\overline{F} = \sup\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{f}_n(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$.
Dodatkowo zakładamy, że funkcja g spełnia warunki:

(viii) Funkcje g_n są określona na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ i przyjmują wartości rzeczywiste dla $n = 1, 2, \ldots$. Ponadto operator g określony na przestrzeni $\mathbb{R}_+ \times l_1$ wzorem

$$(gx)(t) = (g_n(t,x)) = (g_1(t,x), g_2(t,x), \ldots)$$

przekształca przestrzeń $\mathbb{R}_+ \times l_1$ w l_1 oraz jest taki, że rodzina funkcji $\{(gx)(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest równociągła w każdym punkcie przestrzeni l_1, to znaczy dla dowolnie ustalonego $x \in l_1$ i dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$||(gy)(t) - (gx)(t)||_{l_1} \leqslant \varepsilon$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ i dla każdego $y \in l_1$ takiego, że $||y - x||_{l_1} \leqslant \delta$.

(ix) Operator g zdefiniowany w założeniu (viii) jest ograniczony na przestrzeni $\mathbb{R}_+ \times l_1$. Dokładniej, , istnieje dodatnia stała $\overline{G}$ taka, że $||(gx)(t)||_{l_1} \leqslant \overline{G}$ dla dowolnego $x \in l_1$ i dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$.

(x) Istnieje dodatnie rozwiązanie r_0 nierówności

$$A + \overline{F}\,\overline{G}\,K_1 + \overline{G}\,K_1 r\,l(r) \leqslant r$$

takie, że $\overline{G}\,K_1\,l(r_0) < 1$, gdzie stałe $\overline{F}$, $\overline{G}$, K_1 są zdefiniowane wyżej, zaś stała A jest określona następująco

$$A = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(t)| : t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Twierdzenie 14 ([H4, Theorem 4.2.]). *Załóżmy, że spełnione są warunki (i) - (x). Wtedy nieskończony układ równań całkowych* (13) *ma co najmniej jedno rozwiązanie w przestrzeni* $BC(\mathbb{R}_+, l_1)$.

Dowód Twierdzenia 14 opiera się na zastosowaniu twierdzenia Darbo (Twierdzenie 11) i jest prowadzony podobnie do dowodu Twierdzenia 13, uwzględniając modyfikacje wynikające z zawężenia rozważań do przestrzeni l_1.

Przedstawimy teraz trzeci z uzyskanych przez nas rezultatów dotyczących istnienia rozwiązania nieskończonego układu nieliniowych równań całkowych, w dowodzie którego wykorzystujemy wyniki uzyskane w [H3]. Rezultat ten pochodzi z pracy [H6], został on sformułowany i udowodniony dla przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_1)$. Rozważmy następujący nieskończony układ nieliniowych równań całkowych typu Volterry-Hammersteina:

$$x_n(t) = a_n(t) + f_n(t, x_1(t), x_2(t), \ldots) \int_0^t k_n(t,s) g_n(s, x_1(s), x_2(s), \ldots) ds \tag{14}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz dla $t \in \mathbb{R}_+$.
Przedstawimy teraz założenia, przy których rozważać będziemy nieskończony układ równań całkowych (14):

(i) Ciąg funkcyjny $(a_n(t))$ należy do przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_1)$ oraz spełnia warunek

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) = 0.$$

(ii) Funkcje $k_n(t, s) = k_n : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ są ciągłe na zbiorze $\mathbb{R}_+^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ponadto, funkcje $t \to k_n(t, s)$ są lokalnie równociągłe na zbiorze $\mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $s \in \mathbb{R}_+$, to znaczy

$$\underset{T>0}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{t_1,t_2\in[0,T]}{\forall}\ \underset{s\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \big[|t_2 - t_1| \leqslant \delta \Rightarrow |k_n(t_2, s) - k_n(t_1, s)| \leqslant \varepsilon\big].$$

(iii) Istnieje stała $K_1 > 0$ taka, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t |k_n(t,s)| ds \leqslant K_1$$

dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$.

(iv) Ciąg $(k_n(t,s))$ jest równoograniczony na $\mathbb{R}_+^2$, to znaczy istnieje stała $K_2 > 0$ taka, że $|k_n(t,s)| \leqslant K_2$ dla $t, s \in \mathbb{R}_+$ i $n = 1, 2, \ldots$.

(v) Funkcja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest określona na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ i przyjmuje wartości rzeczywiste. Ponadto, funkcja $t \to \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t, x_1, x_2, \ldots)$ jest lokanie jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $x = (x_n) \in l_1$, to znaczy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \forall_{T > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{(x_i) \in l_1} \forall_{t,s \in [0,T]} \Big[|t - s| \leqslant \delta \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t, x_1, x_2, \ldots) - f_n(s, x_1, x_2, \ldots)| \leqslant \varepsilon \Big].$$

(vi) Istnieje niemalejąca funkcja $l : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, ciągła w 0 oraz taka, że istnieją liczba naturalna p oraz nieujemna liczba całkowita q takie, że dla dowolnego $r > 0$ i dla $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in l_1$ spełniających $||x||_{l_1} \leqslant r$, $||y||_{l_1} \leqslant r$ oraz dla $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant p + 1$ spełniona jest nierówność

$$|f_n(t, x_1, x_2, \ldots) - f_n(t, y_1, y_2, \ldots)| \leqslant l(r) \sum_{i=n-p}^{n+q} |x_i - y_i|.$$

Ponadto, zachodzi również nierówność

$$|f_n(t, x_1, x_2, \ldots) - f_n(t, y_1, y_2, \ldots)| \leqslant l(r) \sum_{i=n}^{n+q} |x_i - y_i|$$

dla $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in l_1$ takich, że $||x||_{l_1} \leqslant r$, $||y||_{l_1} \leqslant r$ i dla $t \in \mathbb{R}_+$, $1 \leqslant n \leqslant p$.

(vii) Istnieje niemalejąca funkcja $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, ciągła w 0 oraz ciąg $(\overline{f}_n)$ funkcji nieujemnych należący do przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_1)$ i spełniający warunek $\lim\limits_{t \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{f}_n(t) = 0$ oraz taki, że dla dowolnego $r > 0$ i dla każdego $x = (x_i) \in l_1$ spełniającego $||x||_{l_1} \leqslant r$ zachodzi nierówność

$$|f_n(t, x_1, x_2, \ldots)| \leqslant \overline{f}_n(t) + m(r) \sum_{i=n}^{n+q} |x_i|$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ i dla $t \in \mathbb{R}_+$, gdzie q jest liczbą z założenia (vi).

Na podstawie założenia (vii) wnioskujemy, że istnieje skończona stała

$$\overline{F} = \sup \{ \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f}_n(t) : t \in \mathbb{R}_+ \}.$$

Na podstawie założenia (i) możemy zdefiniować skończoną stałą

$$A = \sup \{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(t)| : t \in \mathbb{R}_+ \}.$$

Podamy teraz kolejne założenia.

(viii) Funkcje $g_n = g_n(t, x_1, x_2, \ldots)$ są określone na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ i przyjmują wartości rzeczywiste dla $n = 1, 2, \ldots$. Ponadto, operator g określony na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times l_1$ wzorem

$$(gx)(t) = (g_n(t, x)) = (g_1(t, x), g_2(t, x), \ldots)$$

przeprowadza zbiór $\mathbb{R}_+ \times l_1$ w l_1 i jest ograniczony przez dodatnie $\overline{G}$, to znaczy dla dowolnego $x \in l_1$ i dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ mamy $||(gx)(t)||_{l_1} \leqslant \overline{G}$. Ponadto, rodzina funkcji $\{(gx)(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest równociągła w każdym punkcie przestrzeni l_1, to znaczy dla dowolnie ustalonego $x \in l_1$ i dla zadanego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$||(gy)(t) - (gx)(t)||_{l_1} \leqslant \varepsilon$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ i dla dowolnego $y \in l_1$ spełniającego $||y - x||_{l_1} \leqslant \delta$.

(ix) Istnieje dodatnie rozwiązanie r_0 nierówności

$$A + \overline{F}\,\overline{G}K_1 + (p+1)\overline{G}K_1 r m(r) \leqslant r$$

spełniające warunek

$$\overline{G}K_1(p+q+1)\max\{l(r_0), m(r_0)\} < 1.$$

Twierdzenie 15 ([H6, Theorem 3.2.])**.** *Załóżmy, że spełnione są założenia (i) - (ix). Wtedy nieskończony układ nieliniowych równań całkowych* (14) *ma co najmniej jedno rozwiązanie* $x(t) = (x_n(t))$ *w przestrzeni* $BC(\mathbb{R}_+, l_1)$.

Zauważmy, że nieskończony układ nieliniowych kwadratowych równań całkowych (14) jest uogólnieniem rozważanego wcześniej w tym podrozdziale układu (13). Zatem Twierdzenie 15 jest uogólnieniem Twierdzenia 14, a ponieważ zachodzi inkluzja $l_1 \subset c_0$, więc Twierdzenie 15 jest również uogólnieniem Twierdzenia 13.
Porównamy teraz założenia poczynione w Twierdzeniach 14 i 15. Układy równań (13) i (14) różnią się jedynie występującą przed znakiem całki funkcją f_n - w układzie (13) pod znakiem funkcji f_n mamy zmienne $t, x_n(t), x_{n+1}(t), \ldots$, natomiast w układzie (14) funkcja f_n jest funkcją zmiennych $t, x_1(t), x_2(t), \ldots$. Oczywiście wymusza to inne założenia dotyczące funkcji f_n w obydwu wymienionych twierdzeniach - w Twierdzeniu 15 założenia o funkcjach f_n są mocniejsze niż w Twierdzeniu 14. Natomiast pozostałe założenia porównywanych Twierdzeń 14 i 15 są praktycznie takie same.

Dowód Twierdzenia 15 opiera sie na twierdzeniu o punkcie stałym typu Darbo (Twierdzenie 11). Najpierw definiujemy operator Q związany z rozważanym układem równań (14) oraz pokazujemy, że Q przekształca przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+, l_1)$ w siebie. Następnie wykazujemy, że istnieje $r_0 > 0$ takie, że operator Q odwzorowuje kulę B_{r_0} w siebie oraz dowodzimy, że Q jest ciągły na tej kuli. W końcu pokazujemy, że dla miary niezwartości $\chi_a(X) = \omega_0(X) + \overline{\chi}_\infty(X) + a_\infty(X)$ zadanej wzorem (10) spełniona jest nierówność kontrakcyjna z założeń Twierdzenia 11, zatem dla zbioru $\Omega = B_{r_0}$ spełnione są wszystkie założenia Twierdzenia 11. Wnioskujemy więc, że operator Q ma co najmniej jeden punkt stały w kuli $B_{r_0} \subset BC(\mathbb{R}_+, l_1)$, zatem układ równań (14) ma co najmniej jedno rozwiązanie w przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+, l_1)$, co kończy dowód.

4.5. Miary niezwartości w przestrzeni funkcji określonych na $\mathbb{R}_+$ o wartościach w przestrzeni Banacha z dowolną miarą niezwartości ([H5])

W podrozdziale 4.3 opisałam konstrukcję miar niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ przy założeniu, że w przestrzeni Banacha E zadana jest miara niezwartości Hausdorffa (lub regularna miara niezwartości równoważna mierze Hausdorffa). W przypadku tym jesteśmy zmuszeni do ograniczenia rozważań do tych przestrzeni Banacha E, w których znamy formułę wyrażającą miarę niezwartości Hausdorffa χ (lub dowolną regularną miarę niezwartości równoważną mierze Hausdorffa). W wielu sytuacjach takie ograniczenie nie było wygodne. Dlatego podjęliśmy dalsze badania, mające na celu konstrukcję miar niezwartości w przestrzeni funkcyjnej $BC(\mathbb{R}_+, E)$, ale przy założeniu, że w przestrzeni E mamy zadaną dowolną (zdefiniowaną w sposób aksjomatyczny) miarę niezwartości.

Załóżmy zatem, że E jest nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha z normą $||\cdot||_E$ oraz μ jest miarą niezwartości w przestrzeni E. Zaznaczmy, że nasze rezultaty pozostaja prawdziwe w przypadku, gdy E jest skończonego wymiaru, lecz znacznie się wtedy upraszczają. Rozważania prowadzimy w przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+, E)$ (z normą supremum), określonej w podrozdziale 4.3, pamiętając, że zdefiniowaliśmy jednocześnie przestrzeń C_T.

Skonstruujemy teraz funkcję będącą miarą niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$. Funkcja ta jest określona na rodzinie zbiorów $\mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$ i jest sumą trzech składników. Jeśli $X \subset \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$, to pierwszy składnik bada zachowanie funkcji należących do zbioru X, drugi składnik dotyczy niezwartości wiązki funkcji utworzonej przez elementy zbioru X w dowolnym punkcie przedziału $\mathbb{R}_+$, zaś trzeci składnik bada zachowanie funkcji ze zbioru X w nieskończoności.

Weźmy dowolny zbiór $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$. Następnie, dla dowolnej funkcji $x \in X$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ zdefiniujmy moduł ciągłości $\omega^{\infty}(x, \varepsilon)$ tej funkcji w następujący sposób:

$$\omega^{\infty}(x, \varepsilon) = \sup \{\|x(t) - x(s)\|_E : t, s \in \mathbb{R}_+, |t - s| \leqslant \varepsilon\}.$$

W celu konstrukcji pierwszego składnika miary niezwartości w $BC(\mathbb{R}_+, E)$ określmy kolejno wielkości:

$$\omega^{\infty}(X, \varepsilon) = \sup \{\omega^{\infty}(x, \varepsilon) : x \in X\}$$

oraz

$$\omega_0^{\infty}(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega^{\infty}(X, \varepsilon). \tag{15}$$

Funkcja $\omega_0^{\infty}(X)$ jest pierwszym składnikiem konstruowanej miary niezwartości. Następnie rozważmy funkcję $\overline{\mu}_{\infty}$ określoną na rodzinie $\mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$ wzorem

$$\overline{\mu}_{\infty}(X) = \lim_{T \to \infty} \overline{\mu}_T(X), \tag{16}$$

gdzie

$$\overline{\mu}_T(X) = \sup \{\mu(X(t)) : t \in [0, T]\}.$$

W ten sposób otrzymaliśmy drugi składnik miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$. Dalej, dla dowolnego $T > 0$ połóżmy

$$a_T(X) = \sup_{x \in X} \Big\{ \sup \{\|x(t)\|_E : t \geqslant T\} \Big\}.$$

Na podstawie własności funkcji $T \to a_T(X)$, $T \in \mathbb{R}_+$ istnieje granica

$$a_{\infty}(X) = \lim_{T \to \infty} a_T(X). \tag{17}$$

Funkcja $a_\infty(X)$ jest trzecim składnikiem miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$. Zdefiniujemy jeszcze dwie wielkości, które również mierzą zachowanie funkcji ze zbioru X w nieskończoności. W tym celu dla $T > 0$ połóżmy

$$b_T(X) = \sup_{x \in X} \Big\{ \sup \{ \|x(t) - x(s)\|_E : t, s \geqslant T \} \Big\}$$

oraz

$$b_\infty(X) = \lim_{T \to \infty} b_T(X). \tag{18}$$

Następnie, dla $t \in \mathbb{R}_+$ zdefiniujmy

$$\mathrm{diam}\ X(t) = \sup \{ \|x(t) - y(t)\|_E : x, y \in X \}$$

oraz

$$c(X) = \limsup_{t \to \infty} \mathrm{diam}\ X(t). \tag{19}$$

Wykorzystując równości (15) - (19), możemy zdefiniować funkcje μ_a, μ_b i μ_c określone na zbiorze $\mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+, E)}$ wzorami:

$$\mu_a(X) = \omega_0^\infty(X) + \overline{\mu}_\infty(X) + a_\infty(X), \tag{20}$$

$$\mu_b(X) = \omega_0^\infty(X) + \overline{\mu}_\infty(X) + b_\infty(X), \tag{21}$$

$$\mu_c(X) = \omega_0^\infty(X) + \overline{\mu}_\infty(X) + c(X). \tag{22}$$

Twierdzenie 16 ([H5, Theorem 3.2.]). *Niech μ będzie miarą niezwartości w przestrzeni Banacha E. Wtedy funkcje μ_a, μ_b i μ_c zdefiniowane wzorami (20) - (22) są miarami niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$. Ponadto, dla dowolnego zbioru $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+, E)}$ zachodzą nierówności*

$$\mu_b(X) \leqslant 2\mu_a(X),$$

$$\mu_c(X) \leqslant 2\mu_a(X).$$

W dalszych rozważaniach będziemy korzystać z pewnych własności jąder miar niezwartości μ_a, μ_b i μ_c zdefiniowanych wzorami (20), (21) i (22), dlatego opiszemy teraz wymienione jądra.

Zauważmy, że jądro $\ker\mu_a$ miary μ_a składa się ze wszystkich ograniczonych podzbiorów X przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ spełniających warunki: funkcje należące do zbioru X są jednostajnie ciągłe oraz równociągłe na przedziale $\mathbb{R}_+$, ponadto w nieskończoności zmierzają do zera w tym samym tempie, czyli spełniony jest warunek:

$$\forall_{\varepsilon > 0}\, \exists_{T > 0}\, \forall_{x \in X}\, \forall_{t \geqslant T}\ ||x(t)||_E \leqslant \varepsilon.$$

Oprócz tego wszystkie przecięcia $X(t)$ zbioru X należą do jądra miary niezwartości μ w przestrzeni E, zatem są zbiorami relatywnie zwartymi w E.

Podobnie, jądro $\ker\mu_b$ miary niezwartości μ_b składa sie ze wszystkich ograniczonych podzbiorów X przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ takich, że funkcje należące do zbioru X są jednostajnie ciągłe oraz równociągłe na przedziale $\mathbb{R}_+$ oraz zmierzaja do granic w nieskończoności jednostajnie względem zbioru X. Ponadto, podobnie jak dla miary μ_a, wszystkie przecięcia $X(t)$ zbioru X należą do jądra miary niezwartości μ w przestrzeni E, więc są zbiorami relatywnie zwartymi w E.

Jądro $\ker\mu_c$ miary niezwartości μ_c składa się ze wszystkich ograniczonych podzbiorów X przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$, takich, że funkcje należące do X są jednostajnie ciągłe i równociągłe na $\mathbb{R}_+$ oraz wszystkie przecięcia $X(t)$ zbioru X należą do jądra $\ker\mu$ w przestrzeni E,

ponadto grubość wiązki utworzonej przez wykresy funkcji z X dąży do zera w nieskończoności.
Miary niezwartości μ_a, μ_b i μ_c zdefiniowane wzorami (20) - (22) nie są pełne, czyli jądra kerμ_a, kerμ_b i kerμ_c są właściwymi podzbiorami rodziny $\mathfrak{N}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$. Dla pokazania tego faktu w pracy [H3] wskazujemy zwarty zbiór $X \subset BC(\mathbb{R}_+, E)$ taki, że X nie należy do żadnej z rodzin kerμ_a, kerμ_b, kerμ_c. Ponadto miary μ_a i μ_b maja własność maksimum, podczas gdy μ_c nie ma tej własności. Jeżeli dodatkowo założymy, że miara niezwartości μ w przestrzeni Banacha E jest podliniowa, to również miary μ_a, μ_b i μ_c są podliniowe w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$.

Opiszemy teraz szczególne przypadki miar niezwartości μ_a, μ_b i μ_c dla $E = l_\infty$. Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha l_∞ jest przestrzenią złożoną z ograniczonych ciągów rzeczywistych z klasyczną normą supremum daną wzorem:

$$\|x\| = \|(x_n)\| = \sup\{|x_n| : n = 1, 2, \dots\},$$

gdzie $x = (x_n) \in l_\infty$. Jak już wspominaliśmy w przestrzeni l_∞ nie znamy formuł wyrażających miarę niezwartości Hausdorffa, zatem dla przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ nie możemy zastosować rezultatów uzyskanych w pracy [H3].
Rozważamy więc przestrzeń

$$BC(\mathbb{R}_+, l_\infty) = \{x : \mathbb{R}_+ \to l_\infty,\ x \text{ jest ciągła i ograniczona na } \mathbb{R}_+\}.$$

Oczywiście, podobnie jak w podrozdziale 4.3, każdą taką funkcję x możemy równocześnie traktować jako ciąg funkcyjny postaci

$$x(t) = (x_n(t)) = (x_1(t), x_2(t), \dots)$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$, gdzie ciag $(x_n(t))$ jest elementem przestrzeni l_∞ dla dowolnego ustalonego t. Norma funkcji $x = x(t) = (x_n(t))$ jest zdefiniowana wzorem

$$\|x\| = \sup\{\|x(t)\|_{l_\infty} : t \in \mathbb{R}_+\} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\Big\{\sup\{|x_n(t)| : n = 1, 2, \dots\}\Big\}.$$

Przedstawimy teraz formuły, które wyrażają miary niezwartości μ_a, μ_b i μ_c opisane wzorami (20) - (22) dla $E = l_\infty$, czyli w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$, wyprowadzenie tych formuł przedstawiliśmy w pracy [H5]. Ustalmy zatem zbiór $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,l_\infty)}$. Otrzymujemy następujący wzór na pierwszy składnik każdej z miar μ_a, μ_b i μ_c:

$$\omega_0^\infty(X) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\sup_{x\in X}\Big\{\sup_{t,s\in\mathbb{R}_+, |t-s|\leqslant\varepsilon}\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n(t) - x_n(s)|\}\Big\}\right\}. \tag{23}$$

Następnie, aby zdefiniować drugi składnik $\overline{\mu}_\infty$ miar μ_a, μ_b i μ_c załóżmy, że w przestrzeni l_∞ mamy następujące trzy miary niezwartości μ^1, μ^2, μ^3 określone na rodzinie $\mathfrak{M}_{l_\infty}$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
\mu^1(X) &= \lim_{n\to\infty}\{\sup_{x=(x_i)\in X}\{\sup_{k\geqslant n}|x_k|\}\},\\
\mu^2(X) &= \lim_{p\to\infty}\{\sup_{x=(x_i)\in X}\{\sup_{n,m\geqslant p}|x_n - x_m|\}\},\\
\mu^3(X) &= \limsup_{n\to\infty} \operatorname{diam} X_n,
\end{aligned}$$

gdzie

$$X_n = \{x_n : x = (x_i) \in X\},$$
$$\operatorname{diam} X_n = \sup\{|x_n - y_n| : x = (x_i), y = (y_i) \in X\}.$$

Wtedy otrzymujemy następujące formuły wyrażające drugi składnik $\overline{\mu}_\infty$:

$$\overline{\mu}^1_\infty(X) = \lim_{T\to\infty}\Big\{\sup_{t\in[0,T]}\Big\{\lim_{n\to\infty}\{\sup_{x=x(t)\in X}\{\sup_{k\geqslant n}|x_k(t)|\}\}\Big\}\Big\}, \tag{24}$$

$$\overline{\mu}^2_\infty(X) = \lim_{T\to\infty}\Big\{\sup_{t\in[0,T]}\Big\{\lim_{p\to\infty}\{\sup_{x=x(t)\in X}\{\sup_{n,m\geqslant p}|x_n(t)-x_m(t)|\}\}\Big\}\Big\}, \tag{25}$$

$$\overline{\mu}^3_\infty(X) = \lim_{T\to\infty}\Big\{\sup_{t\in[0,T]}\{\limsup_{n\to\infty}\{\sup_{x=x(t),y=y(t)\in X}|x_n(t)-y_n(t)|\}\}\Big\}. \tag{26}$$

Teraz zapiszemy formuły na trzeci składnik konstruowanej miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$. Na podstawie równości (17) - (19) otrzymujemy następujące wzory:

$$a_\infty(X) = \lim_{T\to\infty}\Big\{\sup_{x=x(t)\in X}\{\sup_{t\geqslant T}\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n(t)|\}\}\Big\}, \tag{27}$$

$$b_\infty(X) = \lim_{T\to\infty}\Big\{\sup_{x=x(t)\in X}\{\sup_{t,s\geqslant T}\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n(t)-x_n(s)|\}\}\Big\}, \tag{28}$$

$$c(X) = \limsup_{t\to\infty}\{\sup_{x=x(t),y=y(t)\in X}\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n(t)-y_n(t)|\}\}. \tag{29}$$

Zatem, na podstawie formuł (20) - (22) wyrażających miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ oraz wyprowadzonych wyżej wzorów (23) - (29) możemy zapisać dziewięć formuł wyrażających miary niezwartości w przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$:

$$\mu^i_a(X) = \omega^\infty_0(X) + \overline{\mu}^i_\infty(X) + a_\infty(X) \tag{30}$$

dla $i = 1, 2, 3$,

$$\mu^i_b(X) = \omega^\infty_0(X) + \overline{\mu}^i_\infty(X) + b_\infty(X) \tag{31}$$

dla $i = 1, 2, 3$,

$$\mu^i_c(X) = \omega^\infty_0(X) + \overline{\mu}^i_\infty(X) + c(X) \tag{32}$$

dla $i = 1, 2, 3$.

W świetle wyników uzyskanych w podrozdziale 4.3 nasuwa sie naturalne pytanie: Jeżeli miara niezwartości w przestrzeni E jest miarą Hausdorffa, to jaka zależność zachodzi między miarami niezwartościami w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ opisanymi wzorami (10) - (12) a miarami niezwartości w tej przestrzeni opisanymi formułami (20) - (22)?
Ponieważ miary te różnią się w takim przypadku jedynie pierwszym składnikiem, zatem wystarczy porównać składniki $\omega_0(X)$ i $\omega^\infty_0(X)$. Z konstrukcji wyrażeń $\omega_0(X)$ i $\omega^\infty_0(X)$ wynika, że składnik ω_0 jest ogólniejszy niż składnik ω^∞_0 oraz zachodzi nierówność

$$\omega_0(X) \leqslant \omega^\infty_0(X).$$

Ponadto, $\omega_0(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje należące do X są lokalnie równociągłe na przedziale $\mathbb{R}_+$. Otrzymujemy więc, że miary χ_a, χ_b i χ_c, zdefiniowane w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ formułami:

$$\chi_a(X) = \omega_0(X) + \overline{\chi}_\infty(X) + a_\infty(X),$$

$$\chi_b(X) = \omega_0(X) + \overline{\chi}_\infty(X) + b_\infty(X),$$
$$\chi_c(X) = \omega_0(X) + \overline{\chi}_\infty(X) + c(X)$$
są różne i bardziej ogólne od miar zdefiniowanych równościami (20) - (22).

4.6. Istnienie rozwiązań nieskończonego układu nieliniowych równań całkowych w przestrzeni funkcji określonych na $\mathbb{R}_+$ o wartościach w przestrzeni Banacha z dowolną miarą niezwartości ([H5], [H7])

Przedstawię teraz zastosowania miar niezwartości (30) - (32) skonstruowanych w przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ w poprzednim podrozdziale.
W tym celu rozważmy nieskończony układ nieliniowych kwadratowych równań całkowych typu Volterry-Hammersteina następującej postaci

$$x_n(t) = a_n(t) + f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) \int_0^t k_n(t,s) g_n(s, x_1(s), x_2(x), \dots) ds \tag{33}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ i dla $n = 1, 2, \dots$.
Najpierw przedstawię rezultat o istnieniu rozwiązania $x(t)$ układu równań (33) w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$, przy czym rozwiązanie to jest funkcją jednostajnie ciągłą na przedziale $\mathbb{R}_+$. Rezultat ten pochodzi z pracy [H5]. Następnie opiszę mocniejszy wynik, który mówi, że układ równań (33) ma jednostajnie ciągłe rozwiązanie należące do przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$, które jest funkcją zbieżną w nieskończoności do pewnego ciągu z przestrzeni l_∞. Rezultat ten jest opisany w [H7]. Rozważania będziemy prowadzić w opisanej wcześniej przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$.

Przedstawię teraz pierwszy z wymienionych wyżej rezultatów. W przypadku tym z dziewięciu miar niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ wyrażonych równościami (30) - (32) zastosujemy miarę niezwartości zdefiniowaną wzorem (32) w przypadku, gdy $i = 3$, czyli miarę postaci:
$$\mu_c^3(X) = \omega_0^\infty(X) + \overline{\mu}_\infty^3(X) + c(X),$$
gdzie ω_0^∞, $\overline{\mu}_\infty^3$ i c są zdefiniowane przez formuły odpowiednio (23), (26) i (29).

Zapiszemy teraz założenia, przy których będziemy rozważać nieskończony układ kwadratowych równań całkowych (33).

(i) Ciag $(a_n(t))$ jest elementem przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$. Ponadto, funkcje $a_n = a_n(t)$ są równociągłe na $\mathbb{R}_+$.

Dla naszych dalszych celów oznaczmy przez A normę elementu $(a_n(t))$ w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$, tj.
$$A = \sup\Big\{ \sup\{|a_n(t)| : n = 1, 2, \dots\} : t \in \mathbb{R}_+ \Big\}.$$

(ii) Funkcje $k_n(t,s) = k_n : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ są ciągłe na zbiorze $\mathbb{R}_+^2$ $(n = 1, 2, \dots)$. Ponadto, funkcje $t \to k_n(t,s)$ są równociągłe na zbiorze $\mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $s \in \mathbb{R}_+$, to znaczy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{s\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \underset{t_1,t_2\in\mathbb{R}_+}{\forall} \Big[|t_2 - t_1| \leqslant \delta \Rightarrow |k_n(t_2,s) - k_n(t_1,s)| \leqslant \varepsilon\Big].$$

(iii) Istnieje stała $K_1 > 0$ taka, że

$$\int_0^t |k_n(t,s)| ds \leqslant K_1$$

dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$ i $n = 1, 2, \dots$.

(iv) Ciąg $(k_n(t,s))$ jest równoograniczony na $\mathbb{R}_+^2$, to znaczy istnieje stała $K_2 > 0$ taka, że $|k_n(t,s)| \leqslant K_2$ dla $t, s \in \mathbb{R}_+$ i $n = 1, 2, \dots$.

(v) Funkcje f_n są określone na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ i przyjmują wartości rzeczywiste dla $n = 1, 2, \dots$. Ponadto, funkcje $t \to f_n(t, x_1, x_2, \dots)$ są równociągłe na $\mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $x = (x_n) \in l_\infty$, to znaczy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{(x_i)\in l_\infty}{\forall}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{t_1,t_2\in\mathbb{R}_+}{\forall} \big[|t_2 - t_1| \leqslant \delta \Rightarrow$$

$$|f_n(t_2, x_1, x_2, \dots) - f_n(t_1, x_1, x_2, \dots)| \leqslant \varepsilon\big].$$

(vi) Istnieje niemalejąca funkcja $l : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ taka, że $l(0) = 0$, l jest ciągła w 0 oraz spełniony jest warunek

$$|f_n(t, x_1, x_2, \dots) - f_n(t, y_1, y_2, \dots)| \leqslant l(r) \sup\{|x_i - y_i| : i \geqslant n\}$$

dla dowolnego $r > 0$, dla $x = (x_i),\ y = (y_i) \in l_\infty$ takich, że $\|x\|_{l_\infty} \leqslant r$, $\|y\|_{l_\infty} \leqslant r$ i dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$ i $n = 1, 2, \dots$.

(vii) Ciag funkcyjny $(\overline{f}_n)$, gdzie $\overline{f}_n(t) = |f_n(t, 0, 0, \dots)|$ jest elementem przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$.

Zauważmy, ze z założenia (vii) wynika, że istnieje skończona stała

$$\overline{F} = \sup\{\overline{f}_n(t) : t \in \mathbb{R}_+, n = 1, 2, \dots\}.$$

(viii) Funkcje g_n są określone na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ i przyjmują wartości rzeczywiste dla $n = 1, 2, \dots$. Ponadto, istnieje niemalejąca funkcja $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, ciągła w $r = 0$ i taka, że $m(0) = 0$ oraz

$$|g_n(t, x_1, x_2, \dots) - g_n(t, y_1, y_2, \dots)| \leqslant m(r) \sup\{|x_i - y_i| : i \geqslant n\}$$

dla dowolnego $r > 0$, dla $x = (x_i),\ y = (y_i) \in l_\infty$ takich, ze $\|x\|_{l_\infty} \leqslant r$, $\|y\|_{l_\infty} \leqslant r$ i dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$ i $n = 1, 2, \dots$.

(ix) Operator g określony na przestrzeni $\mathbb{R}_+ \times l_\infty$ wzorem

$$(gx)(t) = (g_n(t,x)) = (g_1(t,x), g_2(t,x), \dots)$$

jest ograniczony, to znaczy istnieje dodatnia stała $\overline{g}$ taka, że $\|(gx)(t)\|_{l_\infty} \leqslant \overline{g}$ dla dowolnego $x \in l_\infty$ i dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$.

(x) Istnieje dodatnia stała $\overline{G}$ taka, że dla dowolnych $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ i dla każdego $x = x(t) = (x_n(t)) \in BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ zachodzi nierówność

$$\int_0^t |g_n(s, x(s))| ds = \int_0^t |g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)| ds \leqslant \overline{G}.$$

(xi) Istnieje dodatnie rozwiązanie r_0 nierówności

$$A + \overline{F}\overline{g}K_1 + \overline{g}K_1 r l(r) \leqslant r$$

takie, że

$$\overline{g}K_1 l(r_0) + (r_0 l(r_0) + \overline{F})K_1 m(r_0) < 1,$$

gdzie stałe $\overline{F}$, $\overline{g}$, K_1 i A były zdefiniowane wyżej.

Uwaga 17. Zauważmy, że z założenia (vi) wynika, że dla dowolnego $r > 0$ i dla $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in l_\infty$ takich, że $\|x\|_{l_\infty} \leqslant r$, $\|y\|_{l_\infty} \leqslant r$ oraz dla $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest następująca nierówność

$$|f_n(t, x_1, x_2, \dots) - f_n(t, y_1, y_2, \dots)| \leqslant l(r)\|x - y\|_{l_\infty},$$

gdzie $l = l(r)$ jest funkcją z założenia (vi).
Podobnie, na podstawie założenia (viii) otrzymujemy, że

$$|g_n(t, x_1, x_2, \dots) - g_n(t, y_1, y_2, \dots)| \leqslant m(r)\|x - y\|_{l_\infty}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ i dla $r > 0$, przy założeniu, że $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in l_\infty$ są takie, że $\|x\|_{l_\infty} \leqslant r$, $\|y\|_{l_\infty} \leqslant r$. Funkcja $m = m(r)$ jest określona w założeniu (viii).

Zapiszemy teraz główny rezultat uzyskany w pracy [H5] dotyczący rozwiązalności nieskończonego układu równań (33).

Twierdzenie 18 ([H5, Theorem 4.2.]). *Załóżmy, że spełnione są założenia (i)-(xi) opisane powyżej. Wtedy nieskończony układ równań całkowych* (33) *ma co najmniej jedno rozwiązanie* $x(t) = (x_n(t))$ *w przestrzeni* $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$. *Ponadto, funkcja* $x = x(t)$ *jest jednostajnie ciągła na przedziale* $\mathbb{R}_+$.

W celu przeprowadzenia dowodu Twierdzenia 18 zakładamy, że w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ mamy miarę niezwartości zdefiniowaną wzorem

$$\mu_c^3(X) = \omega_0^\infty(X) + \overline{\mu}_\infty^3(X) + c(X).$$

Dowód prowadzimy w oparciu o Twierdzenie 11. Najpierw na przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ definiujemy trzy operatory F, V i Q w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
(Fx)(t) =&((F_n x)(t)) = (f_n(t, x(t))) = (f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots)),\\
(Vx)(t) =&((V_n x)(t)) = \Big(\int_0^t k_n(t, s) g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots) ds\Big),\\
(Qx)(t) =&((Q_n x)(t)) = (a_n(t) + (F_n x)(t)(V_n x)(t)).
\end{aligned}$$

W pierwszym kroku dowodu, stosując Uwagę 17 i założenia (v), (vi) i (vii) wykazujemy, że operator F przekształca przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ w siebie. Następnie, stosując założenia (ii), (iii), (iv), (ix) i (x), pokazujemy, że operator V przekształca przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ w siebie. Łącząc otrzymane rezultaty i korzystając z faktu, że $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ jest algebrą Banacha (porównaj z dowodem Twierdzenia 13) oraz z założenia (i) dostajemy, że operator Q przekształca przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ w siebie. Następnie, na podstawie wyprowadzonych już oszacowań dla operatorów F i V oraz założenia (xi) wnioskujemy, że istnieje liczba $r_0 > 0$ taka, że operator Q przeprowadza kulę B_{r_0} w siebie. W dalszym ciągu, korzystając z uwagi 17 oraz założenia (vi), otrzymujemy, że operator Q jest ciągły na kuli B_{r_0}. Do zakończenia dowodu istnienia rozwiązań pozostało nam do pokazania ostatnie założenie o prawdziwości nierówności kontrakcyjnej. W celu wykazania tej nierówności dla miary niezwartości $\mu_c^3(X)$ wykazujemy nierówności kontrakcyjne dla każdego z trzech składników $\omega_0^\infty(X)$, $\overline{\mu}_\infty^3(X)$ oraz $c(X)$ miary $\mu_c^3(X)$ oraz tak dobieramy stałą kontrakcji, aby nierówność była spełniona dla sumy $\omega_0^\infty(X) + \overline{\mu}_\infty^3(X) + c(X)$. Ponadto, korzystając z faktu, iż zbiór wszystkich punktów stałych operatora Q należących do kuli B_{r_0} jest elementem jądra $\ker\mu$ oraz z opisu jąder miar niezwartości μ_a, μ_b oraz μ_c zawartych w podrozdziale 4.5 wnioskujemy, że funkcja $x = x(t)$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $\mathbb{R}_+$, co kończy dowód.

Przedstawię teraz drugi ze wspomnianych na początku tego podrozdziału rezultatów. Rezultat ten jest tematem publikacji [H7]. W celu otrzymania tego rezultatu z dziewięciu miar niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ wyrażonych równościami (30) - (32) zastosujemy miarę niezwartości zdefiniowaną wzorem (31) w przypadku, gdy $i = 1$, czyli miarę postaci:

$$\mu_b^1(X) = \omega_0^\infty(X) + \overline{\mu}_\infty^1(X) + b_\infty(X),$$

gdzie ω_0^∞, $\overline{\mu}_\infty^1$ i b_∞ są zdefiniowane przez formuły odpowiednio (23), (24) i (28).

Rozważamy nadal nieskończony układ nieliniowych równań całkowych (33). Poniżej zapiszemy założenia, które nakładamy na funkcje występujące w tym układzie równań.

(i) Ciag $(a_n(t))$ jest elementem przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ takim, że istnieje właściwa granica $\lim\limits_{t\to\infty} a_n(t)$ jednostajna względem $n \in \mathbb{N}$, tzn. spełniony jest nastepujący warunek typu Cauchy'ego

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{T>0}{\exists}\ \underset{t,s\geqslant T}{\forall}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ |a_n(t) - a_n(s)| \leqslant \varepsilon.$$

Ponadto, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(t) = 0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) Funkcje $k_n(t, s) = k_n : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ są ciągłe na zbiorze $\mathbb{R}_+^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ponadto, funkcje $t \to k_n(t, s)$ są równociągłe na zbiorze $\mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $s \in \mathbb{R}_+$, to znaczy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{s\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \underset{t_1,t_2\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \big[|t_2 - t_1| \leqslant \delta \Rightarrow |k_n(t_2, s) - k_n(t_1, s)| \leqslant \varepsilon\big].$$

(iii) Istnieje stała $K_1 > 0$ taka, że $\int\limits_0^t |k_n(t, s)|ds \leqslant K_1$ dla $t \in \mathbb{R}_+$ i $n = 1, 2, \ldots$. Ponadto, $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_0^t |k_n(t, s)|ds = 0$ jednostajnie względem $n \in \mathbb{N}$, to znaczy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{T>0}{\exists}\ \underset{t\geqslant T}{\forall}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \int\limits_0^t |k_n(t, s)|ds \leqslant \varepsilon.$$

(iv) Ciąg $(k_n(t, s))$ jest równoograniczony na $\mathbb{R}_+^2$, to znaczy istnieje stała $K_2 > 0$ taka, że $|k_n(t, s)| \leqslant K_2$ dla $t, s \in \mathbb{R}_+$ i $n = 1, 2, \ldots$.

(v) Funkcje f_n są określone na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ i przyjmuje wartości rzeczywiste dla $n = 1, 2, \ldots$. Ponadto, funkcja $t \to f_n(t, x_1, x_2, \ldots)$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}_+$ lokalnie jednostajnie względem $x = (x_n) \in l_\infty$ i jednostajnie względem $n \in \mathbb{N}$, to znaczy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{r>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x=(x_i)\in l_\infty, \|x\|_{l_\infty}\leqslant r}{\forall}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{t,s\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \big[\,|t - s| \leqslant \delta \Rightarrow$$

$$|f_n(t, x_1, x_2, \ldots) - f_n(s, x_1, x_2, \ldots)| \leqslant \varepsilon\big].$$

(vi) Ciąg funkcyjny $(\overline{f}_n)$ zdefiniowany równością $\overline{f}_n(t) = |f_n(t, 0, 0, \ldots)|$ (dla $t \in \mathbb{R}_+$ i $n = 1, 2, \ldots$) jest ograniczony na $\mathbb{R}_+$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{f}_n(t) = 0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$.

(vii) Dla każdego $r > 0$ istnieje właściwa granica $\lim\limits_{t\to\infty} f_n(t, x_1, x_2, \ldots)$ jednostajnie względem $x \in l_\infty$ takich, że $\|x\|_{l_\infty} \leqslant r$ i $n \in \mathbb{N}$, to znaczy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{r>0}{\forall}\ \underset{T>0}{\exists}\ \underset{t,s\geqslant T}{\forall}\ \underset{x\in l_\infty, \|x\|_{l_\infty}\leqslant r}{\forall}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ |f_n(t, x) - f_n(s, x)| \leqslant \varepsilon.$$

(viii) Istnieje niemalejąca funkcja $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ taka, że m jest ciągła w 0 oraz spełniony jest warunek

$$|f_n(t, x_1, x_2, \ldots) - f_n(t, y_1, y_2, \ldots)| \leqslant m(r) \sup\{|x_i - y_i| : i \geqslant n\}$$

dla dowolnego $r > 0$, dla $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in l_\infty$ takich, że $\|x\|_{l_\infty} \leqslant r$, $\|y\|_{l_\infty} \leqslant r$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$ and $n = 1, 2, \ldots$.

(ix) Funkcja g_n jest określona na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ i przyjmuje wartości rzeczywiste dla $n = 1, 2, \ldots$. Ponadto, operator g określony na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times l_\infty$ wzorem

$$(gx)(t) = (g_n(t, x)) = (g_1(t, x), g_2(t, x), \ldots)$$

przekształca zbiór $\mathbb{R}_+ \times l_\infty$ w l_∞ oraz jest taki, że rodzina funkcji $\{(gx)(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest równociągła na przestrzeni l_∞, to znaczy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\|(gy)(t) - (gx)(t)\|_{l_\infty} \leqslant \varepsilon$$

dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$ i dla wszystkich $x, y \in l_\infty$ takich, ze $\|x - y\|_{l_\infty} \leqslant \delta$.

(x) Operator g zdefiniowany w założeniu (ix) jest ograniczony na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times l_\infty$, to znaczy istnieje dodatnia stała $\overline{G}$ taka, że $\|(gx)(t)\|_{l_\infty} \leqslant \overline{G}$ dla dowolnego $x \in l_\infty$ i $t \in \mathbb{R}_+$.

(xi) Istnieje dodatnie rozwiązanie r_0 nierówności

$$A + \overline{F}\,\overline{G}K_1 + \overline{G}K_1 r\, m(r) \leqslant r$$

takie, że $\overline{G}K_1 m(r_0) < 1$, gdzie stałe $\overline{G}$, K_1 zostały zdefiniowane wyżej, zaś stałe A, $\overline{F}$ są określone następująco

$$A = \sup\{|a_n(t)| : t \in \mathbb{R}_+, n = 1, 2, \ldots\},$$
$$\overline{F} = \sup\{\overline{f}_n(t) : t \in \mathbb{R}_+, n = 1, 2, \ldots\}.$$

Sformułujemy jeszcze uwagi i lematy opisujące własności funkcji występujących w układzie równań (33).

Uwaga 19. Na podstawie założeń (i) i (vi) wnioskujemy, że stałe A i F są skończone.

Uwaga 20. Ciąg $(\overline{f}_n)$ opisany w założeniu (vi) jest elementem przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$.

Lemat 21. *Niech $x(t) = (x_n(t)) \in BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$. Wtedy ciąg (x_n) jest równoograniczony i lokalnie równociągły na $\mathbb{R}_+$.*

Lemat 22. *Niech $x(t) = (x_n(t)) \in BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ będzie taka, że istnieje właściwa granica $\lim\limits_{t\to\infty} x_n(t)$ jednostajnie względem $n \in \mathbb{N}$, tzn. spełniony jest warunek*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{T>0}{\exists}\ \underset{t,s\geqslant T}{\forall}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ |x_n(t) - x_n(s)| \leqslant \varepsilon$$

(zobacz założenie (i)). Wtedy ciąg (x_n) jest równoograniczony oraz równociągły na $\mathbb{R}_+$.

Zapiszemy teraz twierdzenie będące drugim z rezultatów, o których jest mowa na początku tego podrozdziału.

Twierdzenie 23 ([H7, Theorem 3.1.]). *Załóżmy, że spełnione są założenia (i) - (xi). Wtedy nieskończony układ równań całkowych (33) ma co najmniej jedno rozwiązanie $x(t) = (x_n(t))$ w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$, które jest jednostajnie ciągłe na $\mathbb{R}_+$ i dąży w nieskończoności do granicy będącej elementem przestrzeni l_∞.*

Porównując założenia poczynione dla Twierdzenia 18 oraz powyższe założenia Twierdzenia 23 widzimy, że założenia dla Twierdzenia 23 są nieco mocniejsze. Oczywiście jest to związane z silniejszym wynikiem otrzymanym w Twierdzeniu 23. Wzmocnione założenia dotyczą istnienia właściwych granic funkcji składowych występujących w układzie równań (33) i mają zapewnić zbieżność rozwiązania układu (33) do granicy z przestrzeni l_∞.
Dowód Twierdzenia 23 w pracy [H7] został przeprowadzony z wykorzystaniem twierdzenia typu Darbo o punkcie stałym (Twierdzenie 11) dla przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ oraz miary niezwartości w tej przestrzeni $\mu_b^1(X) = \omega_0^\infty(X) + \overline{\mu}_\infty^1(X) + b_\infty(X)$, gdzie ω_0^∞, $\overline{\mu}_\infty^1$ i b_∞ są zdefiniowane przez formuły odpowiednio (23), (24) i (28). Dla potrzeb dowodu definiujemy operator całkowy Q związany z układem równań (33), który odwzorowuje przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ w siebie. Następnie wykazujemy, że istnieje domknięta kula $\Omega \subset BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ taka, że operator Q przeprowadza zbiór Ω w siebie w sposób ciągły. W następnym kroku dowodu wykazujemy, że dla dowolnego niepustego podzbioru X zbioru Ω zachodzi nierówność kontrakcyjna z miarą niezwartości μ_b^1. Spełnione są więc założenia Twierdzenia 11, więc wnioskujemy, że operator Q ma co najmniej jeden punkt stały w zbiorze Ω. Zatem nieskończony układ równań całkowych (33) ma co najmniej jedno rozwiazanie $x = x(t)$ w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$. Korzystając z opisu jądra miary niezwartości μ_b (opis ten znajduje się w podrozdziale 4.5 po dowodzie Twierdzenia 16), otrzymujemy, że rozwiązanie to jest jednostajnie ciągłe na $\mathbb{R}_+$ jako element jądra $\ker\mu_b^1$. Ponadto, jak wynika z opisu jądra miary niezwartości μ_b, istnieje granica $\lim_{t\to\infty} x(t)$ w przestrzeni l_∞, inaczej - istnieje element $g = (g_n) \in l_\infty$ taki, że $\lim_{t\to\infty} x(t) = g$. Równoważnie oznacza to, że gdy zapiszemy x w postaci $x(t) = (x_n(t))$, to dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ istnieje właściwa granica $\lim_{t\to\infty} x_n(t) = g_n$. Innymi słowy możemy więc powiedzieć, że rozwiązanie $x = x(t) = (x_n(t))$ jest zbieżne po współrzędnych w nieskończoności. To kończy dowód twierdzenia.

4.7. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze stanowią następujące publikacje:

[P1] A. Chlebowicz, A. Sładek, M. Wołowiec-Musiał, *Automorphisms of certain forms of higher degree over ordered fields*, Linear Algebra Appl. 331 (2001), 145-153.

[P2] A. Chlebowicz, M. Wołowiec-Musiał, *A note on linear preservers of ternary cubic forms*, Acta Math. Inf. Univ. Ostrav. 9 (2001), 33-38.

[P3] A. Chlebowicz, M. Wołowiec-Musiał, *Forms with a unique representation as a sum of powers of linear forms*, Tatra Mt. Math. Publ. 32 (2005), 33-39.

[P4] A. Chlebowicz, *Certain finite groups as automorphism groups of forms of higher degree*, Linear Algebra Appl. 419 (2006), 326-330.

[P5] A. Chlebowicz, M. A. Darwish, K. Sadarangani, *Existence and asymptotic stability of solutions of a functional integral equation via a consequence of Sadovskii's theorem*, J. Funct. Spaces, Volume 2014, Article ID 32408, 9 pages.

[P6] J. Banaś, A. Chlebowicz, *On elementary inequality and its application in the theory of integral equations*, J. Math. Inequal. 11 (2017), 595-605.

[P7] J. Banaś, A. Chlebowicz, *Solvability of an integral equation of Erdélyi-Kober type in the class of subpower functions*, J. Nonlinear Convex Anal. 18(2) (2017), 317-330.

[P8] J. Banaś, A. Chlebowicz, *On a quadratic integral equation of Erdélyi-Kober type in the class of subpower functions*, J. Nonlinear Convex Anal. 19(5) (2018), 823-840.

Omówienie publikacji [P1]–[P4]

Publikacje [P1]–[P4] powstały w czasie moich studiów doktoranckich w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego oraz w okresie 2 lat po zakończeniu tych studiów, gdy nadal prowadziłam współpracę z dr. hab. Andrzejem Sładkiem, prof. UŚ (promotorem w moim przewodzie doktorskim). Publikacje te dotyczą tematyki form wyższych stopni. Główne dwa problemy badawcze, którymi zajmowaliśmy się w publikacjach [P1]–[P4] to przedstawialność form w postaci kombinacji liniowych potęg form liniowych i jednoznaczność takiego przedstawienia oraz opis struktury grupy automorfizmów form z przedstawieniem jednoznacznym. Przedstawię krótko tę tematykę. Załóżmy, że K jest ciałem charakterystyki 0. Formą n zmiennych stopnia d nad ciałem K nazywamy wielomian jednorodny $f(X) = f(X_1, \dots, X_n) \in K[X_1, \dots, X_n]$ stopnia d. Niech $\mathbb{Z}_+^n$ oznacza zbiór $n-$ elementowych ciagów liczb całkowitych nieujemnych. Dla $i = (i_1, ..., i_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ oraz wektora $X = (X_1, ..., X_n)$ piszemy X^i zamiast $X_1^{i_1} ... X_n^{i_n}$. Wprowadźmy oznaczenia $|i| := i_1 + ... + i_n$ oraz $c(i) := |i|!/\prod(i_k!)$. Dla $d \geqslant 1$ oznaczmy

$$\mathcal{I}(n, d) := \{i \in \mathbb{Z}_+^n : |i| = d\}.$$

Dowolna forma n zmiennych stopnia d nad ciałem K może być zapisana w postaci

$$f(X) = \sum_{i \in \mathcal{I}} c(i) a(f; i) X^i,$$

gdzie $\mathcal{I} = \mathcal{I}(n, d)$ oraz $a(f; i) \in K$.
Z drugiej strony dowolny wektor $\alpha = (a_1, ..., a_n) \in K^n$ wyznacza formę $(\alpha\bullet)^d$ n zmiennych stopnia d określoną w następujący sposób:

$$(\alpha\bullet)^d(X) := (\sum_{j=1}^{n} a_j X_j)^d = \sum_{i \in \mathcal{I}} c(i) \alpha^i X^i.$$

Wszystkie formy n zmiennych stopnia d nad ciałem K tworzą przestrzeń liniową nad ciałem K, którą oznaczamy symbolem $F_{n,d}(K)$. Wymiar tej przestrzeni wynosi $|\mathcal{I}(n, d)|$. Dla dowolnej formy $f \in F_{n,d}(K)$ określamy jej zbiór zer w następujący sposób

$$\mathcal{Z}(f) := \{\alpha \in K^n : f(\alpha) = 0\},$$

przy czym zbiór ten traktujemy rzutowo (czyli jego elementy nie są proporcjonalne).
Niech AutK^n oznacza grupę automorfizmów przestrzeni liniowej K^n nad ciałem K. Automorfizm $\varphi \in$ AutK^n nazywamy automorfizmem formy $f \in F_{n,d}(K)$, jeżeli dla dowolnego $(X_1, \dots, X_n) \in K^n$ zachodzi warunek:

$$f(X_1, \dots, X_n) = f(\varphi(X_1, \dots, X_n)).$$

Zbiór wszystkich automorfizmów formy f tworzy grupę, którą nazywamy grupą ortogonalną (lub grupą automorfizmów) formy f. Grupę automorfizmów formy f (nad ciałem K) oznaczamy symbolem $\mathrm{Aut}_K(f)$.
W naszych rozważaniach ważną rolę pełni pojęcie d-niezależności. Mówimy, że zbiór $A = \{\alpha_1, ..., \alpha_r\} \subset K^n$ jest $d-$niezależny, jeśli formy $(\alpha_1\bullet)^d, ..., (\alpha_r\bullet)^d$ są liniowo niezależne w przestrzeni $F_{n,d}(K)$.
W pracy [P1] uzyskaliśmy dwa główne rezultaty, sformułowane jako Theorem 6 oraz Corollary 12. Pierwszy z nich dotyczy ustalenia warunków, przy których forma

$$f = \sum_{i=1}^{r} a_i (\alpha_i \bullet)^d$$

ma tzw. przedstawienie jednoznaczne dobre. Udowodniliśmy, że jeśli zbiór $\{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$ jest d-niezależnym zbiorem zer pewnej formy dodatnio półokreślonej, to forma $f = \sum_{i=1}^{r} a_i(\alpha_i \bullet)^d$ ma przedstawienie jednoznaczne dobre. Drugi z naszych rezultatów mówi, że dowolna grupa rzędu $2n$ zawierajaca centralną inwolucję jest izomorficzna z grupą ortogonalną pewnej formy stopnia $4n$. Jednocześnie zaznaczyliśmy, że stopień $4n$ jest większy niż to konieczne, ale wtedy nie potrafiliśmy tego stopnia obniżyć, Dopiero w pracy [P4] udało się obniżyć ten stopień i udowodnić, ze dowolna grupa rzędu $2n$ zawierająca centralną inwolucję jest grupą izomorfizmów pewnej formy stopnia 8 (Twierdzenie 4).

W pracy [P2] zajmujemy się formami ternarnymi stopnia 3. Główny wynik uzyskany w tej pracy to Theorem 6, które opisuje grupę automorfizmów nieosobliwej formy ternarnej stopnia 3. Dzięki temu twierdzeniu możemy również opisać strukturę grupy automorfizmów form ternarnych stopnia 3.

Natomiast w pracy [P3] omawiamy jednoznaczność przedstawienia formy stopnia $d \geqslant 3$ w postaci sumy potęg form liniowych. Główny rezultat tej publikacji to Corollary 3.6, w którym opisano warunki zapewniające jednoznaczność przedstawienia formy niezdegenerowanej w postaci sumy potęg form pierwszego stopnia.

Omówienie publikacji [P5]–[P8]

Publikacja [P5] została napisana w wyniku współpracy prowadzonej z prof. Kishinem Sadaranganim z Uniwersytetu Las Palmas w Hiszpanii oraz prof. Mohamedem A. Darwishem z Uniwersytetu King Abdulaziz w Arabii Saudyjskiej. W pracy [P5] zajmujemy się równaniem funkcyjno-całkowym postaci

$$x(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t g(t, s, x(s))ds, \qquad t \in \mathbb{R}_+. \tag{34}$$

Nasz główny rezultat to Theorem 8, które mówi, że przy spełnieniu pewnych (naturalnych dla tego typu twierdzeń) założeń równanie (34) ma co najmniej jedno rozwiązanie $x \in BC(\mathbb{R}_+)$ oraz rozwiązania równania (34) są asymptotycznie stabilne. Dowód tego twierdzenia opiera sie na zastosowaniu klasycznego twierdzenia Schaudera o punkcie stałym oraz pewnego rezultatu wynikającego z twierdzenia Sadovskiego o punkcie stałym.

W publikacji [P6] najpierw dowodzimy następującej nierówności

$$\left|(x^q + a)^{\frac{1}{p}} - (y^q + a)^{\frac{1}{p}}\right| \leqslant |x - y|^{\frac{q}{p}} \qquad \text{dla wszystkich } x, y \in \mathbb{R}, \tag{35}$$

gdzie p i q są liczbami rzeczywistymi takimi, że $1 \leqslant q < p$. Następnie rozważamy pewną klasę równań całkowych Volterry-Wienera-Hopfa i wykorzystując nierówność (35), wykazujemy istnienie rozwiązania równania z tej klasy w przestrzeni funkcji $BC(\mathbb{R}_+)$, ponadto rozwiązanie to ma granicę w nieskończoności. W pracy [P6] w podobny sposób rozwiązujemy problem istnienia rozwiązania kwadratowego równania całkowego Fredholma w przestrzeni Höldera.

Prace [P7] i [P8] dotyczą rozwiązalności równań Erdély'ego-Kobera w klasie funkcji podpotęgowych. Równania Erdély'ego-Kobera to równania rzędu ułamkowego, którym początek dały trzy prace A. Erdély'ego i H. Kobera opublikowane w roku 1940 w czasopismie Quarterly Journal of Mathematics. Równiania te mają zastosowania w teorii transformaty Hankela oraz w opisie uogólnionych ruchów Browna. W [P7] badamy rozwiązalność równania Erdély'ego-Kobera następującej postaci:

$$x(t) = h(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{ms^{m-1}s^p f(t, s, x(s))}{(t^m - s^m)^{1-\alpha}} ds, \;\; t \in \mathbb{R}_+.$$

Dla powyższego równania udowodniliśmy istnienie rozwiązania w klasie funkcji ciągłych na półosi rzeczywistej, których wzrost jest ograniczony przez odpowiednio dobraną funkcję potęgową. W dowodzie tego wyniku używamy klasycznych metod analizy nieliniowej oraz twierdzenia Schaudera o punkcie stałym. Natomiast w pracy [P8] wykazaliśmy istnienie rozwiązania dla kwadratowego równania całkowego Erdély'ego-Kobera postaci:

$$x(t) = h(t) + \frac{g(t, x(t))}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{ms^{m-1}s^p f(t, s, x(s))}{(t^m - s^m)^{1-\alpha}} ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

stosując technikę miar niezwartości oraz twierdzenie o punkcie stałym typu Darbo.

5. Informacja o aktywności naukowej realizowanej w więcej niż jednej uczelni, w szczególności zagranicznej

2000-2004 studia doktoranckie w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach,

2005-2007 udział w seminarium Zakładu Algebry Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach (wygłoszone 3 referaty),

2014 współpraca z prof. Kishinem Sadaranganim, zatrudnionym w Uniwersytecie Las Palmas de Gran Canaria oraz w Uniwersytecie La Laguna w Hiszpanii oraz z prof. Mohamedem A. Darwishem, zatrudnionym w Uniwersytecie King Abdulaziz w Arabii Saudyjskiej - efektem współpracy jest publikacja: A. Chlebowicz, M. A. Darwish, K. Sadarangani, *Existence and asymptotic stability of solutions of a functional integral equation via a consequence of Sadovskii's theorem*, J. Func. Spaces, Volume 2014, Article ID 32408, 9 pages,

2017 współpraca z prof. Mohamedem Aziz Taoudi, zatrudnionym w Uniwersytecie Cadi Ayyad w Maroku - efektem współpracy jest rozdział w monografii: A. Chlebowicz, M.-A. Taoudi, *Measures of Weak Noncompactness and Fixed Points*, "Advances in Nonlinear Analysis via the Concept of Measure of Noncompactness" (Editors: Józef Banaś, Mohamed Jleli, Mohammad Mursaleen, Bessem Samet, Calogero Vetro) (2017), 247-296,

2018 udział w Joint Meeting UMI SIMAI PTM we Wrocławiu zorganizowanym przez Uniwersytet Wrocławski i Politechnikę Wrocławską (16-20 września 2018) - współorganizacja oraz prowadzenie sesji tematycznej *Nonlinear Operators, Approximation Algorithms for Operator Equations and Related Problems*,

2021 współpraca z prof. Mohamedem Aziz Taoudi, zatrudnionym w Uniwersytecie Cadi Ayyad w Maroku - efektem współpracy jest publikacja: J. Banaś, A. Chlebowicz, M.-A. Taoudi, *On solutions of infinite systems of integral equations coordinatewise converging at infinity*, J. Appl. Anal. Comput. 12(5) (2022), 1901-1921,

2022 wykład pt. *Measures of Noncompactness in Function Spaces: Applications* (na zaproszenie) oraz pobyt badawczy w Niemczech w Uniwersytecie w Würzburgu w Instytucie Matematyki (01.09.2022 - 04.09.2022).

6. Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę

Osiągnięcia dydaktyczne

1. Promotor prac magisterskich (10 prac).

2. Promotor prac licencjackich (43 prace).

3. Recenzent prac licencjackich i magisterskich (75 prac).

4. Opracowanie i prowadzenie wykładów monograficznych dla studentów kierunku matematyka: Równania całkowe, Szeregi liczbowe i badanie ich zbieżności, Ciągowe i funkcyjne przestrzenie liniowe.

5. Prowadzenie wykładów i ćwiczeń dla studentów kierunku matematyka: Algebra liniowa, Analiza matematyczna III, Analiza matematyczna IV, Funkcje rzeczywiste, Równania różniczkowe, Topologia, Seminarium dyplomowe.

6. Współautorstwo skryptu dla studentów kierunku matematyka: A. Chlebowicz, M. Wołowiec-Musiał, *Repetytorium z algebry liniowej* wydanego przez Oficynę Wydawniczą Politechniki Rzeszowskiej.

Osiągnięcia organizacyjne

1. Organizacja i prowadzenie sesji *Methods of nonlinear analysis and their applications* w ramach kongresu ICNPAA World Congress 2018, 3-6 lipiec 2018, Yerewan, Armenia.

2. Współorganizacja i prowadzenie sesji *Nonlinear Operators, Approximation Algorithms for Operator Equations and Related Problems* w ramach konferencji Joint Meeting of UMI, SIMAI and PTM, 16-20 wrzesień 2018, Wrocław, Polska.

3. Przewodnicząca Komitetu organizacyjnego międzynarodowej konferencji *Methods of Nonlinear Analysis in Differential and Integral Equations*, 15-16, 22-23 maj 2021, Rzeszów, Polska.

4. Członek Rady Wydziału Matematyki i Fizyki Stosowanej (cztery kadencje).

5. Prodziekan ds. kształcenia Wydziału Matematyki i Fizyki Stosowanej kadencji 2019/2020.

6. Nagroda Rektora Politechniki Rzeszowskiej za działalność organizacyjną na rzecz Wydziału Matematyki i Fizyki Stosowanej (nagroda zespołowa) (2014).

7. Organizacja "Wykładów otwartych" dla uczniów podkarpackich szkół średnich w roku akad. 2019/2020.

8. Organizacja "Warsztatów matematycznych" na Wydziale Matematyki i Fizyki Stosowanej dla uczniów podkarpackich szkół średnich w roku akad. 2019/2020.

7. Inne informacje dotyczące kariery zawodowej

1. Nagrody Rektora Politechniki Rzeszowskiej za publikacje naukowe (2010, 2018, 2019, 2021).

2. Medal Srebrny za Długoletnią Służbę (2017).

3. Recenzent Mathematical Reviews.

4. Recenzent artykułów w czasopismach: Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales Serie A. Mathemáticas; Banach Journal of Mathematical Analysis; Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen; Journal of Integral Equations and Applications; Mathematica Bohemica; Matematicki Vesnik; Abstract and Applied Analysis; Asian Journal of Mathematics and Computer Research; Electronic Journal of Mathematical Analysis and Application; Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics; Journal of Function Spaces; Journal of Mathematics and Applications.

5. Promotor pomocniczy w przewodzie doktorskim dr Weroniki Woś, rozprawa *Zastosowanie pewnych miar niezwartości w egzystencjalnej teorii nieskończonych układów równań całkowych*, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie, data otwarcia przewodu: 02.06.2021, data zakończenia przewodu: 17.01.2022.

6. Udział w konferencjach:
   1) Letnia Szkoła Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, wrzesień 2000, Wisła, Polska, tytuł referatu: *Automorfizmy form nad ciałami uporządkowanymi*,
   2) 5th Polish, Slovak and Czech Conference on Number Theory, 14-18 czerwiec 2004, Terchova, Słowacja, tytuł referatu: *Aumorphism groups of forms over ordered fields*,
   3) XIV International Conference on Mathematics, Informatics and Related Fields, 7-11 listopad 2008, Ustrzyki Dolne, Polska, tytuł referatu: *Automorphisms of sums of powers of linear forms*,
   4) VI Sympozjum Nieliniowej Analizy, 7-9 wrzesień 2011, Centrum Badań Nieliniowych im. J. P. Schaudera Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, Polska, tytuł referatu: *O całkowalnych rozwiązaniach nieliniowego całkowego równania Volterry*,
   5) International Conference on Theory, Methods and Applications of Nonlinear Equations, 17-21 grudzień 2012, Texas AM University, Kingsville, USA, tytuł referatu: *On integrable solutions of a functional integral equation under Carathéodory conditions*,
   6) 14th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2016, 19-25 wrzesień 2016, Rhodes, Grecja, tytuł referatu: *On the space of integrable with a weight functions*,
   7) 8 Forum Matematyków Polskich, 18-22 wrzesień 2017, Lublin, Polska,tytuł referatu: *O istnieniu podpotęgowych rozwiązań równania całkowego typu Erdé-lyi'ego-Kobera*,
   8) ICNPAA World Congress 2018, 3-6 lipiec 2018, Yerevan, Armenia, organizator sesji: Methods of nonlinear analysis and their applications, tytuł referatu: *On existence of subpower solutions of a quadratic integral equation of Erdélyi-Kober type*,
   9) Joint Meeting of UMI, SIMAI and PTM, 16-20 wrzesień 2018, Wrocław, Polska, współorganizator (razem z Giuseppe Marino i Tomaszem Zającem) sesji: Nonlinear Operators, Approximation Algorithms for Operator Equations and Related Problems, tytuł referatu: *On the integral equations of Erdélyi-Kober type.*

Literatura

[1] A. Aghayani, R. Allahyari, M. Mursaleen, *A generalization of Darbo's theorem with application to the solvability of systems of integral equations*, J. Comp. Appl. Math. 260 (2014), 68-77.

[2] A. Aghayani, A. S. Haghighi, *Existence of solutions for a system of integral equations via measure of noncompactness*, Novi Sad J. Math. 44(1) (2014), 59-73.

[3] A. Aghayani, E. Pourhadi, *Application of measure of noncompactness to l_1-solvability of infinite systems of second order differential equations*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 22 (2015), 105-118.

[4] J. S. Angell, W. E. Olmstead, *Singularly perturbed Volterra integral equations*, SIAM J. Appl. Math. 7 (1987), 1-14.

[5] A. S. Apartsyn, I. V. Silver, *Using the nonclassical Volterra equations of the first kind to model developing systems*, Autom. Remote Control 74 (2013), 899-910.

[6] J. Appell, E. De Pascale, *Su alcumi parametri connesi con la misura di non compattezza di Hausdorff in spazi di funzioni misurabili*, Boll. Un. Mat. Ital. B (6) 3 (1984), 497-515.

[7] J. Appell, P. P. Zabrejko, *Nonlinear Superposition Operators*, in: Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 95, Cambridge University Press, 1990.

[8] J. Banaś, K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach Spaces, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, vol. 60, Marcel Dekker, New York, 1980.

[9] J. Banaś, Z. Knap, *Measures of weak noncompactness and nonlinear integral equations of convolution type*, J. Math. Anal. Appl. 146 (1990), 353-362.

[10] J. Banaś, M. Lecko, *Solvability of infinite systems of differential equations in Banach spaces*, J. Comput. Appl. Math. 137 (2001), 363-375.

[11] J. Banaś, M. Lecko, *An existence theorem for a class of infinite systems of integral equations*, Math. Comput. Modelling 34 (2001), 535-539.

[12] J. Banaś, N. Merentes, B. Rzepka, *Measures of noncompactness in the space of continuous and bounded functions defined on the real half-axis*"; in: Advances in Nonlinear Analysis via the Concept of Measures of Noncompactness (Editors: J. Banaś, M. Jleli, M. Mursaleen, B. Samet, C. Vetro), Springer, Singapore, 2017, 1-58.

[13] J. Banaś, M. Mursaleen, *Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations*, Springer, New Delhi, 2014.

[14] J. Banaś, J. Rivero, *On measures of weak noncompactness*, Ann. Mat. Pura Appl. 151(4) (1988), 213-224.

[15] J. Bélair, *Population models with state-dependent delays*, in: Mathematical Population Dynamics (Editors: O. Arino, D. E. Axelrod, M. Kimmel), Marcel Dekker, New York, 1991, 165-176.

[16] F. Brauer, *On a nonlinear integral equation for population growth problems*, SIAM J. Math. Anal. 6 (1975), 312-317.

[17] F. Brauer, *Constant rate harvesting of populations governed by Volterra integral equations*, J. Math. Anal. Appl. 56 (1976), 18-27.

[18] H. Brunner, *Volterra Integral Equations. An Introduction to Theory and Applications*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, 2017.

[19] K. L. Cooke, J. A. Yorke, *Some equations modelling growth processes and gonorrhea epidemics*, Math. Biosci. 16 (1973), 75-101.

[20] K. L. Cooke, *An epidemic equation with immigration*, Math. Biosci. 29 (1976), 135-158.

[21] P. J. Davis, D. B. Duncan, *Stability and convergence of collocation schemes for retarded potential integral equations*, SIAM J. Numer. Anal. 42 (2004), 1167-1188.

[22] J. Dieudonné, *Sur les espaces de Köthe*, J. Anal. Math. 1 (1951), 81-115.

[23] C. L. Dolph, *Non-linear equations of the Hammerstein type*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 31 (1945), 60-65.

[24] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators*, Int. Publ., Leyden, 1963.

[25] I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, Acta Math. 27 (1903), 365–390.

[26] L.S. Goldenštein, I.T. Gohberg, A.S. Markus, *Investigations of some properties of bounded linear operators with their q-norms*, Učen Kishinevsk. Univ. 29 (1957), 29-36.

[27] L.S. Goldenštein, A.S. Markus, *On a measure of noncompactness of bounded sets and linear operators*, in: Studies in Algebra and Mathematical Analysis, Trudy Inst. Mat. Akad. Nauk Moldav. SSSR (1), Kishinev, 1965, 45-54.

[28] M. Golomb, *Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Functionalgleichungen*, Math. Zeit. 39 (1935), 45-75.

[29] G. Gripenberg, *The construction of the solution of an optimal control problem described by Volterra integral equations*, SIAM J. Control Optim. 21 (1983), 582-597.

[30] A. Hammerstein, *Nichtlineare integralgleichungen nebst anwendungen*, Acta Math. 54 (1930), 117-176.

[31] B. Hazarika, H. M. Srivastava, R. Arab, M. Rabbani, *Existence of solutions for an infinite susytem of nonlinear integral equations via measure of noncompactness and homotopy perturbation method to solve it*, J. Comp. Appl. Math. 343 (2018), 341-352.

[32] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig und Berlin, Teubner, 1912.

[33] F. R. de Hoog, R. S. Anderssen, *Regularization of first kind integral equations with application to Couette viscometry*, J. Integral Equations Appl. 18(2) (2006), 249-265.

[34] F. R. de Hoog, R. S. Anderssen, *Kernel perturbations for Volterra convolution integral equations*, J. Integral Equations Appl. 22(3) (2010), 427-441.

[35] F. R. de Hoog, R. S. Anderssen, *Kernel perturbations for convolution first kind Volterra integral equations*, J. Math-for-Ind.,Vol. 4 (2012A-1), 1-4.

[36] R. Iglisch, *Existence und Eindentigkeit Sätze bei nichtlinearen Integralgleichungen*, Math. Ann. 108 (1936), 161.

[37] L. S. Jiang, *Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2005.

[38] J. Keller, *Propagation of simple non-linear waves in gas filled tubes with friction*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) 32 (1981), 170-181.

[39] M.A. Krasnosel'skii, *On the continuity of the operator $Fu(x) = f(x, u(x))$*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 77 (1951), 185-188.

[40] M.A. Krasnosel'skii, P.P. Zabrejko, J.I. Pustyl'nik, P.J. Sobolevskii, *Integral Operators in Spaces of Summable Functions*, Noordhoff, Leyden, 1976.

[41] P. K. Lamm, *A survey of regularization methods for first-kind Volterra equations*, in: Surveys on Solution Methods for Inverse Problems (Editors: D. Colton, H. Engl et al.), Springer-Verlag, Vienna, 2000, 53-82.

[42] P. K. Lamm, L. Elden, *Numerical solutions of first kind Volterra equations by sequential Tikhonov regularization*, SIAM J. Numer. Anal. vol. 34, no. 4 (1997), 1432 - 1456.

[43] W. R. Mann, F. Wolf, *Heat transfer between solids and gases under nonlinear boundary conditions*, Quart. Appl. Math. 9 (1951), 163-184.

[44] R. K. Miller, *Nonlinear Volterra Integral Equations*, W. A. Benjamin, 1971.

[45] S. A. Mohiuddine, H. M. Srivastava, A. Alotaibi, *Application of measures of nocompactness to infinite system of second-order differential equations in l_p spaces*, Adv. Diifference Equ. 2016 (2016), Article 317, 1-13.

[46] M. Mursaleen, S. A. Mohiuddine, *Applications of measures of noncompactness to the infinite systems of differential equations in l_p spaces*, Nonlinear Anal. 75 (2012), 2111-2115.

[47] W. Okrasiński, *Nontrivial solutions to nonlinear Volterra integral equations*, SIAM J. Math. Anal. 22 (1991), 1007-1015.

[48] W. E. Olmstead, C. M. Kirk, C. A. Roberts, *Blow-up in a subdiffusive medium with advection*, Discrete Contin. Dynam. Syst. 28 (2010), 1655-1667.

[49] A. Peice, E. Siebrits, *Stability analysis of model problem for elastodynamic boundary element discretization*, Numer. Methods Partial Differential Equations 12 (1996), 585-613.

[50] A. Peice, E. Siebrits, *Stability analysis and design of time-stepping schemes for general elastodynamic boundary element models*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 40 (1997), 319-342.

[51] C. A. Roberts, D. G. Laseigne, W. E. Olmstead, *Volterra equations which model explosion in a diffusive medium*, J. Integral Equations Appl. 5 (1993), 531-546.

[52] B. Rzepka, K. Sadarangani, *On solutions of an infinite system of singular integral equations*, Math. Comput. Modelling 45 (2007), 1265-1271.

[53] G. Scorza Dragoni, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variable*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 17 (1948), 102-106.

[54] V. Volterra, *Sulla inversione degli integrali definiti*, R. C. Accad. Lincei 5(5) (1896), 177-185.

[55] V. Volterra, *Sulla inversione degli integrali*, R. C. Accad. Lincei 5(5) (1896), 289-300.

[56] V. Volterra, *Sulla inversione degli integrali definiti*, Atti Acad. Torino 31 (1896), 311-323, 400-408, 537-567, 693-708.

[57] A. M. Wazwaz, *Linear and Nonlinear Integral Equations. Methods and Applications*, Springer, 2011.

[58] P.P. Zabrejko, A.I. Koshelev, M.A. Krasnosel'skii, S.G. Mikhlin, L.S. Rakovschik, J. Stetsenko, *Integral Equations*, Nordhoff, Leyden, 1975.